בס"ד

<u>פתרון תרגיל 10 למורים</u>

.1

$$a.\quad Span\left\{x+2x^2-x^3,\,1+x^2,\,-1-x-x^2,\,x\right\}$$

$$b.\quad Span\left\{\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&-1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$c.\quad Span\left\{(1,2,-1),(-2,-4,2),\left(-\frac{2}{3},-1\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\right\}$$

$$d.\quad Span\left\{(1,0,2,-1),(0,0,-2,1),(0,1,0,0),(0,2,1,0)\right\}$$

$$e.\quad W=\left\{(a+b,a+b,2a+2b,-a-b):\quad a,b\in\mathbb{R}\right\}$$

כך זה נראה לאחר דרוג:

$$a.\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\2&1&-1&0\\1&0&-1&1\\0&1&-1&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&-1&1\\0&1&-1&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

לכן רואים שהעמודה האחרונה (במטריצה המקורית) תלויה לינארית. לכן נוריד אותה ונקבל שהשאר בת"ל כלומר $\left\{x+2x^2-x^3,1+x^2,-1-x-x^2\right\}$ היא בסיס לתת מרחב שמימדו 3.

$$b.\begin{pmatrix}1&-1&0&1&0\\2&-1&1&1&0\\1&1&1&0&1\\3&0&1&1&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&0&1&0\\0&1&1&-1&0\\0&2&1&-1&1\\0&3&1&-2&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&0&1&0\\0&1&1&-1&0\\0&0&-1&1&1\\0&0&-2&1&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&0&1&0\\0&1&1&-1&0\\0&0&-1&1&1\\0&0&0&-1&-1\end{pmatrix}$$

מהדרוג ניתן לראות שהעמודה האחרונה במטריצה תלויה לינארית לכן 4 המטריצות הראשונות בת"ל והמימד הוא 4 כלומר פורשות את כל $R^{2\times2}$.

$$c.\quad Span\left\{(1,2,-1),(-2,-4,2),\left(-\frac{2}{3},-1\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\right\}$$

קל לראות ששני הוקטורים האחרונים הם כפולות של הראשון ולכן הבסיס הוא הוקטור הראשון והמימד הוא 1.

$$d.\quad Span\{(1,0,2,-1),(0,0,-2,1),(0,1,0,0),(0,2,1,0)\}$$

לאחר דרוג בעמודות מקבלים מוביל בכל עמודה לכן הם בת"ל ולפי השלישי חינם בסיס ל V

$$e.\quad W=\{(a+b,a+b,2a+2b,-a-b):\quad a,b\in \square\}$$

$$\begin{pmatrix}a+b\\a+b\\2a+2b\\-a-b\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\1\\2\\-1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\1\\2\\-1\end{pmatrix}$$ הוקטורים זהים ולכן הבסיס הוא : $$\begin{pmatrix}1\\1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

שאלה 2

$U_1 = \{(x,y,z,t) \mid x-y+2t=0, z-2x+y=0\} \subseteq R^4$

$2t = y - x \Rightarrow t = \dfrac{y-x}{2}$

$z = 2x - y$

ולכן : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x-y \\ -0.5x+0.5y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -0.5 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ ולכן הבסיס הוא : $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0.5 \end{pmatrix}\right\}$

$U_2 - anti - Symetric - matrices : A = -A^t , A \in R^{3\times 3}$

המטריצות האנטי סימטריות $V_2 = \left\{ A_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n} \middle| A = -A^T \right\}$: $A = -A^T$ ז"א שכל מטריצה צריכה

לקיים את השוויון הבא : $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & & \cdots & -a_{nn} \end{pmatrix} = -A$ מה שאומר שכל איסרי האלכסון

חייבים להיות =0. .... לכן כל מטריצה שנמצאת שם תראה כך : $\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{1n} & & & 0 \end{pmatrix}$

כל האלכסון הוא אפסים לכן אין צורך במטריצות עבור האלכסון הראשי אלא רק עבור הצדדים,

כלומר $\dfrac{n^2-n}{2}$ מטריצות אלמנטריות עבור הפרישה של חצי מאיבריה.

ולכן הבסיס יראה כך : $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \ldots\ldots \right\}$

U_3 - אוסף כל המטריצות האלכסוניות ב $R^{3\times 3}$.

$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ולכן הבסיס הוא : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

<u>שאלה 3</u>

א. $\{\mathbf{v}_1=\mathbf{w}_2+\mathbf{w}_3,\mathbf{v}_2=\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_3,\mathbf{v}_3=\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2\}$ נבדוק אם הוקטורים תלויים :

$\alpha v1+\beta v2+\gamma v3=0$ כלומר : $\alpha(w2+w3)+\beta(w1+w3)+\gamma(w1+w2)=0$

נפתח ונקבל : $(\beta+\gamma)w1+(\alpha+\gamma)w2+(\alpha+\beta)w3=0$

ידוע ש : $w1,w2,w3$ הם בסיס למרחב ובפרט בת"ל ולכן : $\begin{matrix}(\beta+\gamma)=0\\(\alpha+\gamma)=0\\(\alpha+\beta)=0\end{matrix}$ ומכולם נובע : $\alpha=\beta=\gamma=0$

לפי השלישי חינם הם גם בסיס למרחב V.

ב. $\{\mathbf{v}_1=\mathbf{w}_2-\mathbf{w}_3,\mathbf{v}_2=\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_3,\mathbf{v}_3=\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2\}$

לפי התרגיל הקודם : $\alpha(w2-w3)+\beta(w1-w3)+\gamma(w1-w2)=0$

ידוע ש : $w1,w2,w3$ הם בסיס למרחב ובפרט בת"ל ולכן : $\begin{matrix}(\beta+\gamma)=0\\(\alpha-\gamma)=0\\-\alpha-\beta=0\end{matrix}$ ומכולם נובע : $\alpha=-\beta=\gamma$

ז"א שכאן בניגוד לתרגיל הקודם יש צ"ל לא טריוואלי לדוגמה : $\alpha=\gamma=1$ $\beta=-1$ ולכן הם ת"ל !

שאלה 4 :

עבור קבוצה 1B :

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&a\\2&0&4&b\\1&-1&1&c\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&a\\0&-2&-2&b-2a\\0&-2&-2&c-a\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&a\\0&-2&-2&b-2a\\0&0&0&c+a-b\end{array}\right)$$

המערכת פתירה רק כשאין שורת סתירה ז"א שהקבוצה אינה בסיס ל V אלא פרשת תת מרחב : $c+a-b=0$

עבור קבוצה 2B:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&a\\2&0&4&b\\0&-1&1&c\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&a\\0&-2&-2&b-2a\\0&-1&1&c\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&a\\0&-2&-2&b-2a\\0&0&2&c+a-0.5b\end{array}\right)$$

כאן לא תהיה לעולם שורת סתירה לכן פורש את כל המרחב.

לפי השלישי חינם בסיס ל V.