תרגיל 5, בעיה 2 , ב' (תיקון): הוכיחו:

$$\bigcup_{\alpha\in I}\overline{A_\alpha} \subseteq \overline{\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha}$$

הוכחה. לכל $\alpha \in I$ מתקיים (תכונת הסגור) :

$$A_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \Rightarrow \overline{A_\alpha} \subseteq \overline{\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha}$$

$$\Downarrow$$

$$\bigcup_{\alpha\in I}\overline{A_\alpha} \subseteq \overline{\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha}$$

================================

דוגמה לאי-שיוויון. יהי מ"ט $\mathbb{R}$ ותהי $A_n = \left(\frac{1}{n}, 1\right)$ לכל $n \in \mathbb{N}$. אזי :

$$\overline{A_n} = \overline{\left(\frac{1}{n}, 1\right)} = \left[\frac{1}{n}, 1\right]$$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\overline{A_n} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left[\frac{1}{n}, 1\right] = (0,1]$$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{n}, 1\right) = (0,1)$$

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \overline{(0,1)} = [0,1]$$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\overline{A_n} = (0,1] \subset [0,1] = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n}$$

============================

אבל אם אוסף תת הקבוצות סופי, מתקיים השוויון, כלומר:

$$\overline{A_1} \cup \dots \cup \overline{A_n} = \overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}$$

ההכלה $\subseteq$ הוכחה קודם למקרה הכללי. נשאר לוכיח את ההכלה $\supseteq$.

<u>הוכחה.</u>

כל הקבוצות $\overline{A_1}, \dots, \overline{A_n}$ סגורות (תכונת הסגור). לכן גם האיחוד שלהם $\overline{A_1} \cup \dots \cup \overline{A_n}$ סגור.

לכל $1 \le i \le n$ $\bar{A_i} \supseteq A_i$ ולכן $\overline{A_1} \cup \dots \cup \overline{A_n} \supseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$.

זה מייד גורר $\overline{A_1} \cup \dots \cup \overline{A_n} \supseteq \overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}$, כי אם קבוצה <u>סגורה</u> S מכילה קבוצה B , אז S מכילה גם $\bar{B}$ -זוהי אחת מתכונות הסגור.