תרגיל 9

.1

(א) יהיו $\{(X_i,d_i)\}_{i=1}^n$ מרחבים מטריים. הראו שמרחב המכפלה $X=\prod_{i=1}^n X_i$ הוא מטריזבילי (עם טופולוגיית המכפלה). רמז: הסתכלו על המטריקה $d_{\max}(x,y)=\max_i\{d_i(x_i,y_i)\}$. והיעזרו בעובדה שאם כל ההטלות P_i רציפות ביחס לטופולוגיה τ אזי היא מכילה את טופולוגית המכפלה.

פתרון:

נסמן את טופולוגית המכפלה ב τ_π והטופולוגיה המושרית מ d ב τ_d. צ"ל $\tau_{\max}=\tau_\pi$

($\subseteq$) מ"ל עבור כדורים פתוחים. יהא $B_{\max}(x,r)$ כדור פתוח אזי

$$B_{\max}(x,r)=\{y:\ d(x,y)<r\}=\left\{y:\ \max_i\{d_i(x_i,y_i)\}<r\right\}=\prod_{i=1}^n B_{d_i}(x_i,r)$$

שהינה פתוחה ב τ_π.

($\supseteq$) נראה שכל ההטלות P_i רציפות ביחס ל $\tau_{\max}$. אכן, לכל i מתקיים כי $P_i:(X,\tau_{\max})\to X_i$ רציפה. הוכחה: יהא $x\in X$ נראה כי P_i רציפה בו. אכן יהא ϵ נתון אזי

$$P_i(B_{\max}(x,\epsilon))\subseteq B_{d_i}(x_i,\epsilon)$$

ולכן אם ניקח $\delta=\epsilon$ סיימנו.

(ב) יהי (X,d) מרחב מטרי. הוכיחו שהפונקציה: $d:X\times X\to\mathbb{R}$ רציפה (לפי טופולוגית המכפלה).

פתרון:

ש"ל ש d רציפה ביחס למטריקה שמושרה מ $d_{\max}((x_1,x_2),(y_1,y_2))=\max_i\{d(x_i,y_i)\}$ שהוגדרה בסעיף הקודם.

אכן תהא $(x_1,x_2)\in X\times X$ ונוכיח כי d רציפה בה. נסמן $r=d(x_1,x_2)$ ותהא $U=(r-\epsilon,r+\epsilon)$ סביבה פתוחה של $d(x_1.x_2)$ צ"ל למצוא סביבה V פתוחה של (x_1,x_2) שהתמונה שלה מוכלת ב U. אכן $V=B_{\max}\left((x_1,x_2),\frac{\epsilon}{2}\right)$ תקיים את הדרישה. הוכחה: לכל $(y_1,y_2)\in V$ מתקיים כי

$$d_{\max}((x_1,x_2),(y_1,y_2))=\max_i\{d(x_i,y_i)\}<\frac{\epsilon}{2}$$

ולכן, לפי אי שיוויון המשולש

$$d(y_1,y_2)\le d(x_1,y_1)+d((x_1,x_2)+d(x_2,y_2)<\frac{\epsilon}{2}+r+\frac{\epsilon}{2}$$

ולכן

$$d\left(y_1,y_2\right)-r<\epsilon$$

באופן דומה גם $r-d(y_1,y_2)<\epsilon$ ולכן $\left|d\left(y_1,y_2\right)-r\right|<\epsilon$ כלומר $d\left(y_1,y_2\right)\in U$.

2. יהיו $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ מ"ט דיסקרטים עם 2 איברים לפחות. הוכיחו כי $X=\prod X_i$ אינו דסקרטי.

פתרון:

נבחר $x_i\in X_i$. טענה: הנקודון $\left\{(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\right\}$ אינו פתוח. הוכחה: אף קבוצה פתוחה בסיסית אינה מוכלת בו כי פרט למקום סופי צריך לבחור X_i ו $X_i\neq\{x_i\}$ לפי הנתון.

3. הוכיחו/הפריכו: יהיו X,Y מ"ט ספרביליים. אזי $X\times Y$ ספרבילי.

פתרון:

נתון שקיימות $A\subseteq X,B\subseteq Y$ צפופות בנות מניה. לכן גם $A\times B\subseteq X\times Y$ בת מניה ומקיימת $cl(A\times B)=cl(A)\times cl(B)=X\times Y$.

4. יהיו X,Y מ"ט ספרביליים ו $A\subseteq X,B\subseteq Y$. הוכיחו כי $int(A\times B)=int(A)\times int(B)$

פתרון:

$(\supseteq)$ מתקיים כי $A\times B\supseteq int(A)\times int(B)$ פתוחה ולכן $int(A\times B)\supseteq int(A)\times int(B)$.

$(\subseteq)$נראה זאת עבור כל קבוצה פתוחה בסיסית $U\times V\subseteq A\times B$. אכן, $U\subseteq A,V\subseteq B$ פתוחות ולכן $U\times V\subseteq int(A)\times int(B)$

5. יהיו $\{X_i\}$ מספר לא סופי של מ"ט. הוכיחו כי אם $\emptyset\neq U_i\neq X_i$ פתוחות ב X_i אזי $\prod U_i$ אינה פתוחה ב $X=\prod X_i$.

פתרון:

נניח בשלילה כי היא פתוחה אזי יש קבוצה פתוחה בסיסית $\prod V_i$ שמוכלת בה. מהגדרת טופולוגית המכפלה (מכיוון שזה מכפלה אינסופית) קיים i כך ש $V_i=X_i$ (האמת אינסוף כאלה אבל זה לא משנה) ולכן $U_i\subsetneq V_i$ ומכיוון ש $\prod U_i$ לא ריקה (כי כל הקבוצות לא ריקות) אזי לא ייתכן כי $\prod V_i\subseteq\prod U_i$.

6. יהיו $\{X_i\}$ מ"ט (מספר סופי או אינסופי). ויהיו S_i סגורה ב X_i. הוכיחו כי $\prod S_i$ סגורה ב $\prod X_i$.

פתרון:

נוכיח כי המשלים פתוחה. אכן, לכל i נגדיר $O_i=\prod_{j\neq i}X_i\times S_i^c$ פתוחה במכפלה $\prod X_i$ ומתקיים כי

$$\left(\prod S_i\right)^c=\cup_i O_i$$

שפתוחה כאיחוד של פתוחות.