תרגול 5 – עקרון ההכלה וההדחה

הקדמה:

ראינו כי עפ"י עקרון הסכום, אם A ו B– קבוצות סופיות וזרות אז $|A \cup B| = |A| + |B|$. אבל מהי עוצמת $|A \cup B|$ כאשר הקבוצות A ו B– אינן זרות?

עבור **2** קבוצות: אם A ו B– קבוצות סופיות כלשהן, אזי $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

עבור **3** קבוצות: אם A, B ו C– קבוצות סופיות, אזי

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

עקרון ההכלה וההדחה: תהיינה $A_1, A_2, .., A_n$ קבוצות סופיות. אזי

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n}|A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + \\ +(-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

מסקנה: תהיינה $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq S$ קבוצות סופיות. אזי

$$\left|S \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = |S| - \sum_{i=1}^{n}|A_i| + \sum_{1\le i<j\le n}|A_i \cap A_j| - \sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + \\ +(-1)^{n}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

תרגילים:

תרגיל 1:

כמה מספרים בין 1 ל – 1000 מתחלקים בלפחות אחד מהמספרים 2,3,5?

פתרון:

נגדיר את הקבוצות הבאות:

A_2 - קבוצת המספרים בין 1 ל – 1000 שמתחלקים ב – 2.

A_3 - קבוצת המספרים בין 1 ל – 1000 שמתחלקים ב – 3.

A_5 - קבוצת המספרים בין 1 ל – 1000 שמתחלקים ב – 5.

רוצים למצוא את גודל הקבוצה $A_2 \cup A_3 \cup A_5$.

ניתן לראות כי:

$$|A_2| = \left\lfloor\frac{1000}{2}\right\rfloor = 500, |A_3| = \left\lfloor\frac{1000}{3}\right\rfloor = 333, |A_5| = \left\lfloor\frac{1000}{5}\right\rfloor = 200$$

בנוסף:

$$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor\frac{1000}{6}\right\rfloor = 166, |A_3 \cap A_5| = \left\lfloor\frac{1000}{15}\right\rfloor = 66, |A_5 \cap A_2| = \left\lfloor\frac{1000}{10}\right\rfloor = 100$$

וגם:

$$|\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{A}_3 \cap \mathrm{A}_5| = \left\lfloor\frac{1000}{30}\right\rfloor = 33$$

לכן הפתרון הוא $|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = (500 + 333 + 200) - (166 + 66 + 100) + 33 = 734$.

תרגיל 2:

בכמה דרכים ניתן לחלק 80 כדורים זהים ל – 5 תאים כך שבאף תא לא יהיו יותר מ – 24 כדורים?

פתרון:

סך כל הדרכים לחלק 80 כדורים זהים ל – 5 תאים: $\binom{5-1+80}{5-1} = \binom{84}{4}$.

נסמן ב – A_i $(1 \le i \le 5)$ את קבוצת הדרכים לחלק את הכדורים בהן בתא ה- i יש יותר מ – 24 כדורים.

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5| = \sum_{i=1}^{5}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le 5}|A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le 5}|A_i \cap A_j \cap A_k| - \\ (\text{סכום חיתוכי רביעיות}) + (\text{חיתוך כל החמישיה}) = 5 \cdot \binom{5-1+55}{5-1} - \binom{5}{2}\binom{5-1+30}{5-1} + \binom{5}{3}\binom{5-1+5}{5-1}$$

הפתרון הוא: $\left|\bigcup_{i=1}^{5} A_i\right|$ – סך האפשרויות.

<u>תרגיל 3:</u>
נתונים n כדורים זהים ו – n כדורים צבעוניים בצבעים שונים אחד מהשני.
בכמה דרכים ניתן לחלק את כל הכדורים הנ"ל ל - $2n$ תאים, כאשר בכל אחד מה – n התאים הראשונים יהיה לפחות כדור אחד.

<u>פתרון:</u>
נגדיר A_i $(1 \le i \le n)$ את קבוצת החלוקות בהן התא ה – i ריק.
מתקיים כי $|A_i| = \binom{2n-1+n-1}{n}(2n-1)^n$ לכל $1 \le i \le n$, כמו-כן
$|A_i \cap A_j| = \binom{2n-2+n-1}{n}(2n-2)^n$ לכל $i \ne j$ כך ש - $1 \le i,j \le n$ וכו', לכן בסה"כ, גודלו של הפתרון הוא
$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2n-k+n-1}{n}(2n-k)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{3n-1-k}{n}(2n-k)^n$.

<u>תרגיל 4:</u>
בכמה דרכים ניתן להושיב n זוגות על ספסל כך שאף אישה **לא** תשב לצד בעלה?

<u>פתרון:</u>
נגדיר A_i $(1 \le i \le n)$, את הסידורים כך שהזוג ה – i יושב יחד.
לכל $0 \le k \le n$ מספר הדרכים להושבת $2n$ האנשים, כך שב – k זוגות מסוימים תשב האישה לצד בעלה הוא $(2n-k)! \cdot 2^k$, וזאת מכיוון שמתבוננים בכל זוג מה – k זוגות כבלוק אחד, מספר האפשרויות לסדר אותם על ספסל הוא $(2n-k)!$ ויש עוד 2 סידורים פנימיים בתוך כ"א מהזוגות. ז"א גודל סכום החיתוכים בגודל k הוא $\binom{n}{k}\cdot(2n-k)!\cdot 2^k$ (כל האפשרויות לבחירת k הקבוצות, כפול כל הסידורים האפשריים של הקבוצות), ולכן מספר הסידורים המבוקש הוא
$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(2n-k)!\cdot 2^k$.

<u>תרגיל 5:</u>
מה מספר הסידורים (ללא חזרות) של *MATHEMATICS* שאינן מכילות את התת-סדרות *CAT*, *MAT*, *THE*?

<u>פתרון:</u>
נגדיר:
A_1- הרצף *MAT* מופיע.
A_2- הרצף *CAT* מופיע.
A_3- הרצף *THE* מופיע.
מתקיים כי:
$|A_1| = \binom{9}{1,1,\ldots,1} - \binom{7}{2,1,\ldots,1} = 9! - \frac{7!}{2}$ (מספר המילים שבהם מופיע הרצף *MAT*, פחות כמות המילים שבהם מופיע הרצף *MAT* פעמיים, וזאת כי בכל המילים שבהם מופיע הרצף *MAT*, המילים שמכילות *MAT* פעמיים גם נספרות פעמיים, עבור כל אחת מההופעות).
$|A_2| = \binom{9}{2,1,\ldots,1} = \frac{9!}{2}$.
$|A_3| = \binom{9}{2,2,1,\ldots,1} = \frac{9!}{4}$.
חיתוכים של זוגות:
$|A_1 \cap A_2| = \binom{7}{1,1,\ldots,1} = 7!$.
$|A_1 \cap A_3| = \binom{7}{1,1,\ldots,1} + \binom{7}{1,1,\ldots,1} - \binom{5}{1,1,\ldots,1} = 2\cdot 7! - 5!$ (הגורם הראשון הוא אם הרצפים *MAT* ו – *THE* מופעים, הגורם השני הוא אם הרצף *MATHE* מופיע והגורם השלישי אם *MATHE* ו – *MAT* מופעים. נשים לב כי המילים שבהם מופיע *MAT* ו – *MATHE* נספרות גם במילים שבהם מופעים הרצפים *MAT* ו – *THE* וגם במילים בהם מופיע הרצף *MATHE*).
$|A_2 \cap A_3| = \binom{7}{2,1,\ldots,1} + \binom{7}{2,1,\ldots,1} = \frac{7!}{2} + \frac{7!}{2} = 7!$ (הגורם הראשון הוא אם מופיעים *CAT* ו – *THE*, הגורם השני הוא אם מופיע *CATHE*).
חיתוך של שלושת הקבוצות:

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \binom{5}{1,1,\dots,1} + \binom{5}{1,1,\dots,1} = 2 \cdot 5!$ (הגורם הראשון הוא אם CAT ו – $MATHE$ מופעים, הגורם השני הוא אם MAT ו – $CATHE$).

בסה"כ, בסה"כ $\binom{11}{2,2,2,1,\dots,1} - \left(\text{היחידונים}\right) + \left(\text{חיתוכי זוגות}\right) - \left(\text{חיתוך השלשה}\right)$.

<u>תרגיל 6</u>:

מה מספר הפתרונות (בטבעיים) למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30$ כאשר לכל i, $i \le x_i \le 3i$?

<u>פתרון</u>:

שאלה שקולה תהיה: בכמה אופנים ניתן לחלק 30 כדורים זהים ל – 5 תאים שונים כך שבתא ה – i יהיו בין i ל - $3i$ כדורים.
דבר ראשון נשים לב כי בכל תא יש בהכרח i כדורים, לכן נשים בתא 1 כדור אחד, בתא 2 שני כדורים,..., בתא 5 חמישה כדורים. באופן זה נותרים לנו 15 כדורים שעלינו להכניס ל – 5 תאים כאשר בתא ה – i מותר לשים בין 0 ל - $2i$ כדורים.
נגדיר A_i עבור $1 \le i \le 5$ את הסידורים בהם יש חריגה בתא ה – i. אם חרגנו בתא ה – i אזי שמנו שם לפחות $2i+1$ כדורים, ז"א נשאים לנו עוד $14 - 2i$ כדורים לחלק בין שאר התאים. מתקיים כי,

$\sum_{i=1}^{5} |A_i| = \binom{16}{4} + \binom{14}{4} + \binom{12}{4} + \binom{10}{4} + \binom{8}{4}$.

בנוסף, מתקיים כי ,

$$|A_5 \cap A_1| + |A_4 \cap A_2| + |A_4 \cap A_1| + |A_3 \cap A_2| + |A_3 \cap A_1| + |A_2 \cap A_1| = 5 + 5 + \binom{7}{4} + \binom{7}{4} + \binom{9}{4} + \binom{11}{4}$$

(כל שאר הגורמים הם 0).

בשביל לחרוג ב – 3 תאים, לא ייתכן כי אחד מהם יהיה 4 או 5, לכן $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 1$.

בסה"כ $\binom{19}{4} - \left(\text{היחידונים}\right) + \left(\text{חיתוכי זוגות}\right) - \left(\text{חיתוכי שלשות}\right)$.

<u>תרגיל 7</u>:

נתונה קבוצה $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. כמה סדרות שונות באורך $2n$ ניתן ליצור מאברי הקבוצה, כך שכל איבר יופיע פעמיים ולא יהיו שני איברים זהים סמוכים?

<u>פתרון</u>:

נגדיר A_i $(1 \le i \le n)$ את כל הסדרות שמופיע בהם הרצף $a_i a_i$.

לכל i, $|A_i| = \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}}$, לכן $\sum_{i=1}^{n} |A_i| = \binom{n}{1} \cdot \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}}$.

חיתוך של כל k קבוצות שווה ל – $\frac{(2n-k)!}{2^{n-k}}$, וזאת כי יש לנו k איברים עבור הזוגות הסמוכים ועוד $2(n-k)$ עבור השאר לסדר בשורה, כלומר $2n-k$ איברים לסדר בשורה. מתוכם יש $n-k$ איברים שכ"א מופיע פעמיים.

סה"כ סכום כל החיתוכים בגודל k, הוא $\binom{n}{k} \cdot \frac{(2n-k)!}{2^{n-k}}$.

מכאן שהפתרון הוא $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \cdot \frac{(2n-k)!}{2^{n-k}}$.

<u>תרגיל 8</u>:

מטילים שתי קוביות n פעמים עם חשיבות לסדר ההטלות ועם חשיבות לסדר בין שתי הקוביות בכל הטלה (במילים אחרות, בכל הטלה יש לנו זוג סדור של שתי התוצאות). מה ההסתברות שבסדרה שמתקבלת תופיע כל אחת מבין האפשרויות $(1,1), (2,2), \dots, (6,6)$?

<u>פתרון</u>:

סך האפשרויות הוא 36^n, וזאת כי מספר הזוגות הסדורים האפשריים הוא $6 \cdot 6 = 36$, ובכל אחד מההטלות יש לנו אפשרות לקבל את כל אחד מהזוגות הנ"ל.

נסמן ב – A_i את קבוצת הסדרות בהם (i,i) לא מופיע.

לכל $1 \le i \le 6$, $|A_i| = 35^n$.

לכל $1 \le i \ne j \le 6$, $|A_i \cap A_j| = 34^n$.

לכל $1 \le k \le 6$ קבוצות, החיתוך שווה ל – $(36-k)^n$.

לכן מספר הסדרות שבהם מופיעה כל אחת מהאפשרויות $(1,1),(2,2),\dots,(6,6)$ הוא $\sum_{k=0}^{6}(-1)^k\binom{6}{k}\cdot(36-k)^n$,
ע"מ לקבל את ההסתברות למאורע, עלינו לחלק את המספר שקיבלנו בסך האפשרויות שהוא 36^n.

אי – סדרים:

מספר התמורות של $\{1,2,\dots,n\}$ללא נקודת שבת הוא $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)!=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\approx\frac{n!}{e}$.

<u>תרגיל 9</u>:

לכמה פונקציות חח"ע $f:\{1,2,\dots,100\}\to\{1,2,\dots,100\}$ אין נקודת שבת?

<u>פתרון</u>:

נגדיר A_i $(1\le i\le 100)$ את קבוצת הפונקציות החח"ע כך ש – $f(i)=i$.
מתקיים כי $|A_i|=99!$, חיתוך כל k קבוצות שווה ל – $(100-k)!$.
סך כל הפונקציות הוא $100!$, הפתרון $\sum_{k=0}^{100}(-1)^k\binom{100}{k}(100-k)!$.

<u>תרגיל 10</u>:

א. בכמה דרכים ניתן להציב על לוח שחמט 8 צריחים כך שלא יאיימו זה על זה?
ב. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת כך שאף צריח לא יוצב על האלכסון הלבן (האלכסון הראשי)?
ג. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת אם על כל הצריחים להיות על משבצות לבנות אך לא על האלכסון?

<u>פתרון</u>:

א. בכל שורה ועמודה נמצא בהכרח צריח יחיד (לוח שחמט הוא לוח 8×8). עבור הצריח שיהיה בעמודה הראשונה יש 8 שורות אפשרויות למיקום, עבור הצריח שיהיה בעמודה השנייה יש 7 שורות אפשרויות וכך הלאה, לכן בסה"כ יש $8!$ סידורים חוקיים כנ"ל.

ב. סידורים אלה מתאימים לתמורות אי-סדר מלא של $\{1,2,\dots,8\}$ וכאלה יש $\left\lceil\frac{8!}{e}\right\rceil$, וזאת כי את הצריח הראשון (שבעמודה הראשונה) חייבים למקם באחד מהשורות שהיא לא השורה הראשונה, את הצריח השני (שבעמודה השניה) חייבים למקם באחד השורות שהיא לא השורה השניה וכו'. במילים אחרות, עלינו למצוא עבור כל אחד מ – 8 הצריחים תמורה ללא נקודות שבת, כל צריח תופס רק שורה אחת ואת הצריח ה – i אסור למקם בשורה ה – i.

ג. כל תמורה המתקבלת כאן מורכבת מאי-סדר מלא של $\{1,3,5,7\}$ ו – $\{2,4,6,8\}$, וזאת כי בלוח שחמט ב – 4 מהעמודות המשבצות הלבנות הן במקומות $\{1,3,5,7\}$ וב- 4 מהעמודות המשבצות הלבנות הן במקומות $\{2,4,6,8\}$, לכן בדומה לסעיף הקודם נקבל כי מספר התמורות הוא $\left\lceil\frac{4!}{e}\right\rceil\cdot\left\lceil\frac{4!}{e}\right\rceil$.

פונקצית אוילר:

פונקצית אוילר היא הפונקציה $\phi:\mathbb{N}^+\to\mathbb{N}$ המוגדרת כך: $\phi(1)=1$ ולכל $n>1$, $\phi(n)$ הוא מספר המספרים מתוך הקבוצה $\{1,2,\dots,n\}$ שזרים ל – n.

משפט: יהי $n\in\mathbb{N}$, $n>1$, ותהיה $p_1,p_2,\dots,p_k$ רשימת כל הראשוניים השונים המחלקים את n. אז $\phi(n)=n\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$.

<u>תרגיל 11</u>:

מהו מספר המספרים שזרים ל – 21?

<u>פתרון</u>:

הראשוניים שמחלקים את 21 הם 3,7, לכן $\phi(21)=21\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{7}\right)=21\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{7}=12$, ואכן הראשוניים שזרים ל – 21 הם $\{2,4,5,8,10,11,13,16,17,19,20\}$.