אינפי 3 תרגיל 7 - תיכוניסטים-פתרונות

1. נחפש תחילה נקודות קריטיות בתוך המשולש

$$f_x = 2x - y - 2 = 0$$

$$f_y = 2y - x - 2 = 0$$

זאת מערכת לינארית פשוטה הפתרון היחיד הוא

$$x = 2 \quad y = 2$$

נקודה זאת אכן בתוך המשולש והיא נקודה קריטית. נעבור על צלעות המשולש: עבור $y = 0$

$$f(x,0) = x^2 - 2x$$

$$f' = 2x - 2$$

נקודה קריטית ב $x = 1$כלומר $(1,0)$. בדומה קל למצוא את הנקודה הקריטית $(0,1)$ על הצלע $x = 0$. על הצלע $x + y = 6$ נקבל:

$$\begin{aligned} f(x,6-x) = x^2 + (6-x)^2 - x(6-x) - 2x - 2(6-x) = \\ x^2 + 36 + x^2 - 12x - 6x + x^2 - 2x - 12 + 2x = \\ 3x^2 - 18x + 24 \end{aligned}$$

נגזור ונקבל

$$f' = 6x - 18$$

כלומר $x = 3$ נקודה קריטית. אם נאסוף את כל הנקודות החשודות נקבל את $(2,2),(3,3),(1,0),(0,1)$ ובנוסף את הקודקודים $(0,6),(6,0),(0,0)$ ולכן נותר לבדוק:

$$f(0,6) = 24, \quad f(6,0) = 24, \quad f(0,0) = 0$$

$$f(2,2) = -4, \quad f(3,3) = -3, \quad f(1,0) = f(0,1) = -1$$

קיבלנו ש $(0,6)$ו $(6,0)$ הם מקסימום גלובאלי וערכם 24. ו $(2,2)$ הוא מינימום גלובאלי שערכו -4.

.2

(א)

$$F_z = 2z - e^z$$

$$F_z(0,e,2) = 4 - e^2 \neq 0$$

ולכן המשוואה מגדירה את z כפונקציה של x, y.

$$F_x = y, \quad F_y = 2y + x$$

ולכן בסביבת הנקודה $(0,e)$ מתקיים ש:

$$z_x(x,y) = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{y}{e^z - 2z}, \quad z_y(x,y) = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{2y+x}{e^z - 2z}$$

ולכן

$$z_x(0,e) = \frac{e}{e^2 - 4}, \quad z_y(0,e) = \frac{2e}{e^2 - 4}$$

כעת

$$z_{xy}(x,y) = (\frac{2y+x}{e^z - 2z})'_y = \frac{2(e^z - 2z) - (e^z - 2z)z_y(2y+x)}{(e^z - 2z)^2}$$

$$z_{xy}(0,e) = \frac{2(e^2-4) - (e^2-4)\frac{2e}{e^2-4}(2e)}{(e^2-4)^2} = \frac{2(e^2-4) - 4e^2}{(e^2-4)^2} = \frac{-2e^2 - 8}{(e^2-4)^2}$$

(ב)

$$F_z = x + \frac{y}{z}$$

$$F_z(-2,0,2) = -2 \neq 0$$

ולכן המשוואה מגדירה את z כפונקציה של x, y.

$$F_x = z + 2x, \quad F_y = \ln z$$

ולכן בסביבת הנקודה $(-2,0)$ מתקיים ש:

$$z_x(x,y) = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{z+2x}{x+\frac{y}{z}}, \quad z_y(x,y) = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{\ln z}{x + \frac{y}{z}}$$

ולכן

$$z_x(-2,0) = -\frac{2-4}{-2} = -1, \quad z_y(-2,0) = -\frac{\ln 2}{-2} = \frac{\ln 2}{2}$$

כעת

$$z_{xy}(-2,0) = (-\frac{z+2x}{x+\frac{y}{z}})'_y|_{(-2,0)} = -\frac{z_y(x+\frac{y}{z}) - (\frac{z - yz_y}{z^2})(z+2x)}{(x+\frac{y}{z})^2}|_{(-2,0)} =$$
$$-\frac{\frac{\ln 2}{2}(-2) - (\frac{2}{4})(2-4)}{4} = \frac{-\ln 2 + 1}{4}$$

3. נכתוב

$$F(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^5+\cos z-1}-z^4-1$$

(א)

$$F_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^5+\cos z-1}}$$

לכן

$$F_x(-1,0,0)=\frac{-1}{\sqrt{1+0+1-1}}=-1\neq 0$$

ולכן F מגדירה את x כפונקציה של y,z.

(ב)

$$F_y=\frac{5y^4}{2\sqrt{x^2+y^5+\cos z-1}}$$

לכן

$$F_y(-1,0,0)=0$$

ולכן לא ניתן להשתמש במשפט הפונקציה הסתומה. אבל, קל לראות שניתן לחלץ את y מהמשוואה

$$y=^5\sqrt{(z^4+1)^2-x^2-\cos z+1}$$

ולכן המשוואה מגדירה את y כפונקציה של x,z.

(ג)

$$F_z=\frac{-\sin z}{2\sqrt{x^2+y^5+\cos z-1}}-4z^3$$

ולכן

$$F_z(-1,0,0)=0$$

לכן לא ניתן להשתמש במשפט הפונקציה הסתומה. אבל אפשר לשים לב שאם $(-1-\delta,0,t)$ הוא פתרון למשוואה עבור $\delta,\epsilon>0$ אז גם $(-1-\delta,0,-t)$ הוא פתרון למשוואה. כלומר, לכל סביבת ϵשל $(-1,0,0)$ קיים איזשהו $\delta>0$ ושני ערכים z_1,z_2 כך ש $(-1-\delta,0,z_1)$ ו $(-1-\delta,0,z_2)$ נמצאים בסביבה ו

$$F(-1-\delta,0,z_1)=F(-1-\delta,0,z_2)=0$$

ולכן F לא מגדירה את z כפונקציה של x,y.

4. לפי משפט הפונקציה הסתומה:

$$\frac{\partial x}{\partial y}(a_2,a_3)=-\frac{F_y(a)}{F_x(a)},\quad \frac{\partial y}{\partial z}(a_1,a_3)=-\frac{F_z(a)}{F_y(a)},\quad \frac{\partial z}{\partial x}(a_1,a_2)=-\frac{F_x(a)}{F_z(a)}$$

ולכן ברור ש

$$\frac{\partial x}{\partial y}(a_2,a_3)\cdot\frac{\partial y}{\partial z}(a_1,a_3)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}(a_1,a_2)=-\frac{F_y(a)}{F_x(a)}-\frac{F_z(a)}{F_y(a)}-\frac{F_x(a)}{F_z(a)}=-1$$

5. היות ו $F_y(x_0,y_0)\neq 0$ ברור ש F מגדירה את y כפונקציה של x.לפי נוסחת הגזירה:

$$y_x(x_0)=-\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}$$

לפי הנתונים $F_y(x_0,y_0)\neq 0 \quad F_x(x_0,y_0)=0,$ זה בהכרח מחייב

$$y_x(x_0)=0$$

כעת נגזור שוב לפי x את השוויון:

$$y_{xx}(x)=-(\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)})'_x=-\frac{(F_{xx}(x,y)+F_{xy}(x,y)y_x)F_y(x,y)-(F_{xy}(x,y)+F_{yy}(x,y)y_x)F_x(x,y)}{(F_y(x,y))^2}$$

ולכן:

$$y_{xx}(x_0)=-\frac{F_{xx}(x_0,y_0)F_y(x_0,y_0)}{(F_y(x_0,y_0))^2}=-\frac{F_{xx}(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}\neq 0$$

לכן x_0 היא נקודת מינימום או מקסימום של y. היות ו y רציפה, לכל סביבת ϵ של y_0 קיים איזה y' כך ש

$$|y'-y|<\epsilon$$

וקיימים x_1,x_2 כך , ש

$$y(x_1)=y(x_2)=y'$$

(כי x_0 היא נקודת מינימום או מקסימום). לכן לכל סביבת ϵ של (x_0,y_0) קיימים x_1,x_2,y' כך שנמצאים בסביבה ו

$$F(x_1,y')=F(x_2,y')=0$$

ולכן F לא מגדירה את x כפונקציה של y בסביבת הנקודה (x_0,y_0).