

28.02.19

88-112 אלגברה לינארית 1 – מועד ב'

מרצה: ארז שיינר

מתרגלת: אמונה ליפסקר

אורך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.

הוראות:

- יש לענות על כל 5 השאלות. סה"כ הניקוד המקסימלי 110 נק' (כל ציון מעל 100 יעוגל ל100).
- יש לענות על דפי הבחינה בלבד. ניתן להשתמש במחברת כטיוטה, אך המחברת לא תיבדק כלל.

חלק א'

1. (30 נק') יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית, תהיינה $T, S: V \rightarrow V$ העתקות לינאריות

(אופרטורים), נסמן את העתקת הזהות ב $I: V \rightarrow V$.

א. הוכיחו/הפריכו: אם $(T+I)S = S$ אזי $\text{Im}(S) \subseteq \ker(T)$.

ב. הוכיחו/הפריכו: אם $TST = I$ אזי $TS = ST$.

ג. מצאו העתקות הפיכות T, S כך ש $(T+S)^2 = 0$ וגם $TS = -ST$ או הוכיחו

שלא קיימות כאלה.

דף נוסף לשאלה מספר _____

2. (10 נק') תהינה $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מטריצות ריבועיות כך ש $AB = 0$ ו $BC - I = 0$.
הוכיחו/הפריכו: $A = 0$.

דף נוסף לשאלה מספר _____

חלק ב'

3. (30 נק') נביט במרחב הוקטורי $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ובתתי המרחב שלו

$$U = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid A^t = A\}, \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

(כאשר A^t היא המטריצה המשוחלפת).

- א. (16 נק') מצאו בסיסים ומימדים ל-4 תתי המרחבים: $U, W, U \cap W, U + W$.
- ב. (7 נק') הוכיחו/הפריכו: לכל $A, B \in U$ מתקיים כי $AB \in U$ (כפל מטריצות).
- ג. (7 נק') הוכיחו/הפריכו: לכל $A, B \in W$ מתקיים כי $AB \in W$ (כפל מטריצות).

דף נוסף לשאלה מספר _____

דף נוסף לשאלה מספר _____

4. (24 נק') נביט במרחב הוקטורי $V = \mathbb{R}^3$, ובבסיסים $B = \{(1,0,0), (0,1,2), (0,1,1)\}$,

$C = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,1,1)\}$. יהי D בסיס נוסף כלשהו (לא נתון) ל V .

תהיינה העתקות לינאריות $T, S: V \rightarrow V$ כך שמתקיים:

$$[S]_C^D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, [T]_D^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- א. מצאו בסיסים ומימדים ל $\ker T, \text{Im } S$.
- ב. האם אפשר בעזרת נתוני השאלה למצוא בסיס ל $\ker S$? אם כן מצאו אותו, אחרת הוכיחו שאי אפשר.
- ג. האם אפשר בעזרת נתוני השאלה למצוא בסיס ל $\text{Im } T$? אם כן מצאו אותו, אחרת הוכיחו שאי אפשר.
- ד. מצאו נוסחה מפורשת עבור $S(T(x, y, z))$.

דף נוסף לשאלה מספר _____

5. (16 נק') תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$

א. מצאו לאילו ערכי $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $(x^2, x, 1) \in C(A)$.

ב. מצאו לאילו ערכי $x \in \mathbb{C}$ מתקיים $(x^4, x, 2x+1) \in C(A)$.

ג. דף נוסף לשאלה מספר _____

דף נוסף לשאלה מספר _____