קבוצות

בגדול – קבוצה היא אוסף של איברים. אין משמעות לסדר, איבר לא מופיע באותה קבוצה פעמיים

$\{1,2,3\}$ $\{1,☺,$ שניצל$\}$, $\{7,\{\}\}$

נהוג לסמן קבוצות באותיות גדולות, איברים בקטנות.

שייכות – אם x הוא איבר ב A נסמן $x\in A$

הכלה – אם קבוצה A מוכלת ב B $A\subseteq B \iff x\in A \wedge x\in B$

דוגמא:

$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C} \rightarrow \{a+bi : a,b\in\mathbb{R}\}$

Natural $\{1,2,\ldots\}$

שלמים $\{\ldots,-1,0,1,2,\ldots\}$

רציונאלים $\{\frac{a}{b} : a,b\in\mathbb{Z}\}$

ממשיים

נכון/לא נכון?

$1\in\{1,2,3\} \rightarrow$ נכון

$4\in\{1,2,3\} \rightarrow$ לא נכון

$1\in\{\{1,2,3\}\} \rightarrow$ לא נכון

תרגיל

מצאו קבוצות A,B כך ש:

- 1 $A \in B, A \subseteq B$
- 2 $A \in B, A \nsubseteq B$
- 3 $A \notin B, A \subseteq B$
- 4 $A \notin B, A \nsubseteq B$

(1) $A=\{1,2,3\}$ $B=\{1,2,3,\{1,2,3\}\}$

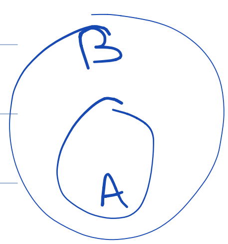
(2) $B=\{1,2,\{1,2,3\}\}$, $\{\{1,2,3\}\}$

(3) $B=\{1,2,3,4,\{1,2\}\}$

(4) $\{\{0\}\}$

תרגיל

נתון $A=\{\phi\}$ ונתון $B=\{\phi,\{\phi\}\}$. סמן את הביטויים הנכונים:



1. $\phi \subseteq B$ כן
2. $\phi \in \phi$ לא
3. $\phi \subseteq \phi$ כן
4. $A \subseteq B$ כן
5. $A \in B$ כן
6. $A \cup B = B$ כן
7. $A \cap B = \phi$ לא

$C=\{1,2,3\}$ $D=\{3,4\}$ $C \cap D=\{3\}$

תרגיל

נתונות $A=\{2m+1 : m\in\mathbb{Z}\}$, ו $B=\{2m+3 : m\in\mathbb{Z}\}$. הוכח שA=B.

פתרון:

נוכיח עם הכלה $\subseteq$ $\supseteq$

$\subseteq$: יהי $x\in A \;\Rightarrow\; \exists m\in\mathbb{Z}: x=2m+1 \;\Rightarrow\; x=2(\overbrace{m-1}^{l}_{\in\mathbb{Z}})+3$

קיים $l\in\mathbb{Z}$ כך ש $x=2l+3$, $l=m-1 \;\Rightarrow\; x\in B$

$\supseteq$: יהי $x\in B \;\Rightarrow\; \exists m\in\mathbb{Z}: x=2m+3 \;\Rightarrow\; x=2(\underbrace{m+1}_{l\in\mathbb{Z}})+1$

$\Rightarrow \exists l\in\mathbb{Z}: x=2l+1 \;\Rightarrow\; x\in A$.

תרגיל

הוכיחו כי $\overbrace{\{n^2 \mid n\in\mathbb{N}\}}^{B} = \{\overbrace{n\in\mathbb{N} \mid \sqrt{n}\in\mathbb{N}}^{A}\}$

הכלה דו-כיוונית:

$\supseteq$: יהי $x\in A$: $x\in\mathbb{N}\wedge\sqrt{x}\in\mathbb{N}$

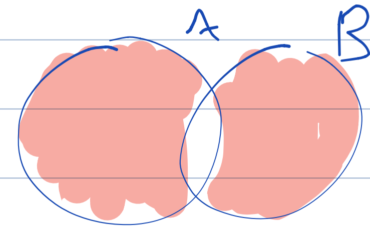
$\sqrt{x}\in\mathbb{N} \xrightarrow[\text{לפי הגדרת } B]{} (\sqrt{x})^2\in B \longrightarrow x\in B$

$\subseteq$: יהי $x\in B$: $\exists n\in\mathbb{N}\;\; x=n^2$

$\sqrt{x}=\sqrt{n^2} \;\Rightarrow\; n=\sqrt{x}$ אז לפי ההגדרה של A

$x\in A$.

פעולות על קבוצות



חיתוך - $A\cap B \iff x\in A \wedge x\in B$

איחוד - $A\cup B \iff x\in A \vee x\in B$

שיוויון - $A=B \iff A\subseteq B \wedge A\supseteq B$

הפרש - $A\setminus B \iff (x\in A)\wedge(x\notin B)$

הפרש סימטרי - $A\triangle B \iff [(x\in A)\wedge(x\notin B)] \vee [(x\notin A)\wedge(x\in B)] \iff A\cup B\setminus A\cap B$

דוגמא:

$A=\{1,2,\{1\}\},\ B=\{1,\{2\}\},\ C=\{2,\{1,2\}\}$

$A\cup B=\{1,2,\{1\},\{2\}\}$

$(A\cup B)\cap C=\{2\}$

$A\cup(B\cap C)=A\cup\phi=A=\{1,2,\{1\}\}$

$B\cap C=\phi$

$C\setminus A=\{\{1,2\}\}$

$B\triangle C=\{1,\{2\},2,\{1,2\}\}$

$A\triangle C=\{1,\{1\},\{1,2\}\}$

תכונות האיחוד והחיתוך (דומה לכפל וחיבור)

- אסוציאטיביות: $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ (וכנ"ל לגבי איחוד)
- חילוף: $A\cap B=B\cap A$ (וכנ"ל לגבי איחוד)
- דיסטריביוטיביות: $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$, וגם
  $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

תרגיל

הוכח כי $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$. במילים: האיברים שהם (גם בA וגם בB) או בC הם בדיוק האיברים ב(A או C) וגם ב(B או C)

$x \in (A \cap B) \cup C \longleftrightarrow x \in A \cap B \vee x \in C \longleftrightarrow [\underbrace{x \in A}_{p} \wedge \underbrace{x \in B}_{q}] \vee \underbrace{x \in C}_{r} \longleftrightarrow$

$(p \wedge q) \vee r \longleftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

$\longleftrightarrow [x \in A \vee x \in C] \wedge [x \in B \vee x \in C] \longleftrightarrow x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$

תרגיל

הוכח כי: א. הקבוצה הריקה $\{\} = \phi$ מוכלת בכל קבוצה A

ב. $\phi \cap A = \phi$

ג. $\phi \cup A = A$

א) יש להוכיח $\forall x \in \phi : x \in A$

המשפט הנ"ל נכון באופן ריק.

ב) $\phi \cap A = \{x : x \in \phi \wedge x \in A\} \subseteq \{x : x \in \phi\} = \phi$

גם ההכלה $\phi \cap A \supseteq \phi$ עשינו (א)

ג) $\phi \cup A = \{x : x \in \phi \vee x \in A\} = \{x : x \in A\} = A$

תרגיל

הוכח כי $A \cap (B/C) = (A \cap B)/(A \cap C)$

דרך שקילויות לוגיות:

$$x \in A \cap (B/C) \longleftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \notin C) \longleftrightarrow [x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C] \vee [x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin A]$$

$$\longleftrightarrow [x \in A \wedge x \in B] \wedge [x \notin C \vee x \notin A] \longleftrightarrow [x \in A \wedge x \in B] \wedge \neg [x \in C \wedge x \in A] \longleftrightarrow x \in A \cap B / A \cap C$$

$$\boxed{q \wedge (r \vee p) \equiv (q \wedge r) \vee (q \wedge p)}$$

דרך הכלה דו-כיוונית

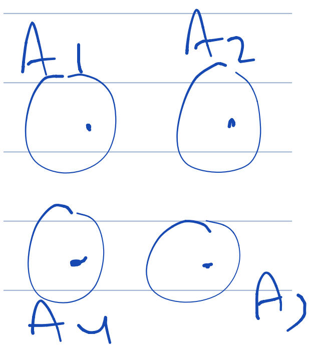
$\subseteq$

$$x \in A \cap (B \setminus C) \longrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C \longrightarrow x \in (A \cap B),\ x \notin (A \cap C) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C)$$

הכללה - איחודים וחיתוכים כלשהם

מוטיבציה: הגדרנו את החיתוך והאיחוד עבור שתי קבוצות. לעיתים נרצה לחתוך או לאחד יותר קבוצות, לדוגמא נרצה לדבר על חיתוכן של 17 הקבוצות $A_1, A_2, \dots, A_{17}$. מכיוון שחיתוך ואיחוד הן פעולות אסוציטיביות, ניתן לרשום $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{17}$, וזה ביטוי חד משמעי. אך צורת רישום זו היא ארוכה, ולכן אנו מסמנים את החיתוך הזה בקיצור הבא: $\bigcap_{i=1}^{17} A_i$. לעיתים נרצה לחתוך או לאחד אוסף אינסופי של קבוצות, ולכן באה ההכללה הבאה:



הגדרה: יהיו $\{A_i\}_{i\in I}$ אוסף קבוצות כאשר I הוא קבוצת אינדקסים אזי נגדיר את האיחוד והחיתוך של אוסף הקבוצות כך:

$$\bigcup_{i\in I} A_i := \{x \mid \exists i \in I : x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i\in I} A_i := \{x \mid \forall i \in I : x \in A_i\}$$ כאן יש להניח שקבוצת האינדקסים I לא ריקה.

דוגמא:

נגדיר $\forall n \in \mathbb{N}\ A_n := [n, n+1]$ אזי

$A_1=[1,2]$ $A_2=[2,3]$, $A_3=[3,4]$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = [1,\infty)$$

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$$ (כי ראינו $A_1\cap A_3=\emptyset$)

תרגיל

לכל n>1 טבעי נגדיר A_n להיות קבוצת כל הראשוניים המחלקים את n.

חשבו את

1. $A_{12} \cap A_{10}$
2. $\cup_{n=2}^{15} A_n$
3. $\cap_{n=2}^{5} A_{6n}$
4. $\bigcup_{i=2}^{\infty} A_i$
5. $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{2^i}$

(1) $A_{12}=\{2,3\}$
$A_{10}=\{2,5\}$ $\Rightarrow A_{12}\cap A_{10}=\{2\}$

(2) $\bigcup_{n=2}^{15} A_n = \{2,3,5,7,11,13\}$

(3) $\bigcap_{n=2}^{5} A_{6n} = \{2,3\}$

(4) $\bigcup_{i=2}^{\infty} A_i = \{p : p \text{ is prime}\}$

(5) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{2^i} = \{2\}$

תרגיל (הכללת פילוג)

יהיו $\{A_i\}_{i\in I}$ אוסף קבוצות, B קבוצה. הוכיחו כי $(\bigcup_{i\in I} A_i)\cap B = \bigcup_{i\in I}(A_i\cap B)$

פתרון:

נוכיח עם הכלה דו-כיוונית

$\subseteq$: $x\in(\bigcup A_i)\cap B \longrightarrow x\in\bigcup A_i \ \wedge\ x\in B \longrightarrow \exists i\in I: x\in A_i \longrightarrow x\in A_i\cap B$

$\downarrow$

$x\in\bigcup_{i\in I}(A_i\cap B)$

$\supseteq$: $x\in\bigcup_{i\in I}(A_i\cap B) \longrightarrow \exists i\in I: x\in A_i\cap B \longrightarrow \exists i:\ x\in A_i \ \wedge\ x\in B \longrightarrow x\in\bigcup_{i\in I}A_i \ \wedge x\in B$

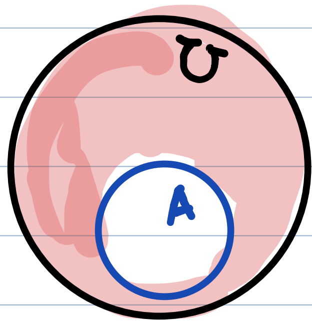
$\downarrow$

$x\in(\bigcup_{i\in I}A_i)\cap B$

משלים (הגדרה)

תהי קבוצה U, נביט בתת-קבוצה A. המשלים של A יוגדר להיות אוסף האיברים ב U שאינם נמצאים ב A

המשלים מסומן כך: A^c



לא ניתן לדבר על משלים אוניברסלי ללא U מכיוון שאין קבוצה המכילה את הכל בעולם

תכונות:

חוקי דה-מורגן:

$$(A\cap B)^c = A^c \cup B^c$$

$$(A\cup B)^c = A^c \cap B^c$$

גם בכללי:

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$$

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$$

בסיסיות:

$$A \cup A^c = U$$

$$\phi^c = U$$

$$U^c = \phi$$

$$(A^c)^c = A$$

תרגיל

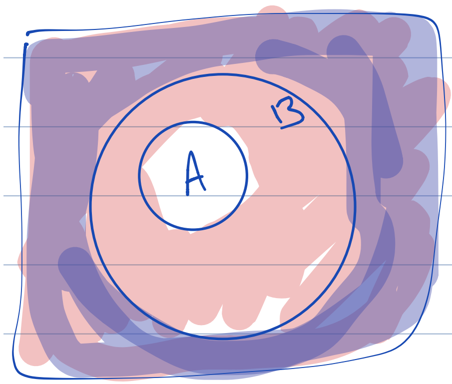
הוכיחו כי $A\triangle B = A^c \triangle B^c$.

פתרון:

$$x\in A\triangle B \longleftrightarrow (x\in A \wedge x\notin B)\vee(x\in B\wedge x\notin A) \longleftrightarrow (x\notin A^c \wedge x\in B^c)\vee(x\notin B^c \wedge x\in A^c) \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow (x\notin B^c \wedge x\in A^c)\vee(x\notin A^c \wedge x\in B^c) \longleftrightarrow (x\in A^c \wedge x\notin B^c)\vee(x\in B^c\wedge x\notin A^c) \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow x\in A^c\triangle B^c$$



תרגיל

יהיו A,B ת"ק של U אזי $A \subseteq B \iff B^c \subseteq A^c$

$x \in B \leftarrow x \notin B^c \leftarrow x \notin A^c \leftarrow x \in A$ $\Leftarrow$

$x \in A^c \leftarrow x \notin A \leftarrow x \notin B \leftarrow x \in B^c$:יהי $\Rightarrow$

קבוצת החזקה

הגדרה: תהי קבוצה A. נגדיר את **קבוצת החזקה** של A בתור אוסף כל תתי הקבוצות של A.
מסומן $P(A)=\{X : X\subseteq A\}$

דוגמא:

אם $A=\{1,2\}$ אזי $P(A)=\{\{\},\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$.

$4=2^2$

האם אתם יכולים למנות כמה איברים יש בקבוצת החזקה?

תרגיל

הוכיחו או הפריכו:

א. לכל A,B מתקיים: $P(A)\cap P(B)=P(A\cap B)$

ב. לכל A,B מתקיים: $P(A)\cup P(B)=P(A\cup B)$

ג. קיימת A כך ש $A\cap P(A)\neq\emptyset$

ד. קיימת A סופית כך ש $A\cap P(A)=P(A)$. לגבי אינסופית תראו בבעתיד.

פתרון:

$x\in P(A)\cap P(B)\longleftrightarrow x\subseteq A\wedge x\subseteq B\longleftrightarrow x\subseteq A\cap B\longleftrightarrow x\in P(A\cap B)$

א)

ב) $A=\{1\},\ B=\{2\}$

$P(A\cup B)=\{\{1\},\{2\},\phi,\{1,2\}\}$

$P(A)=\{\phi,\{1\}\}$ $P(B)=\{\phi,\{2\}\}$ $\Longrightarrow P(A)\cup P(B)=\{\phi,\{1\},\{2\}\}\neq P(A\cup B)$

לא מוכל

ג) $A=\{\phi\}$ $P(A)=\{\phi,\{\phi\}\}$ $A\cap P(A)=\{\phi\}$

$P(\phi)=\{\phi\}$

$A=\{1\},\ P(A)=\{\phi,\{1\}\}$

$A\cap P(A)=\phi$

ד) לא. נניח בשלילה שכן, $P(A)\subseteq A$ בסתירה לכך $|P(A)|>|A|$