01.08.21

84-172 מתמטיקה ב' לכימאים – דר' ארז שיינר – פתרון מועד א' – תשפ"א

משך המבחן: שלוש שעות הוראות: יש לפתור את כל השאלות, משקל כל שאלה 28 נק', כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

שאלה 1 נביט במערכת המשוואות הבאה עם הנעלמים x,y,z,w והפרמטר a, בשדה המספרים הממשיים.

$$\begin{cases} x+y+z+aw=1 \\ x+y+a^2z-w=a \\ ax+y+z+w=1 \end{cases}$$

א. מצאו לכל ערכי הפרמטר a אם למערכת יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרונות כלל

נדרג את המטריצה המתאימה למערכת המשוואות הנתונה

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a & | & 1 \\ 1 & 1 & a^2 & -1 & | & a \\ a & 1 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-aR_1]{R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a & | & 1 \\ 0 & 0 & a^2-1 & -1-a & | & a-1 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 & | & 1-a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a & | & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 & | & 1-a \\ 0 & 0 & a^2-1 & -1-a & | & a-1 \end{pmatrix}$$

כעת נבדוק מי הם האיברים הפותחים, כלומר בכל שורה מי האיבר הראשון משמאל ששונה מאפס.

אם $a\neq \pm 1$ אזי $1-a\neq 0$ וגם $a^2-1\neq 0$ ולכן המטריצה מדורגת.

במקרה זה למטריצה אין שורת סתירה, והמשתנה w הינו חופשי ולכן יש אינסוף פתרונות למערכת

אם $a=1$ המטריצה היא

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

זו מטריצה מדורגת ללא שורת סתירה ושני משתנים חופשיים ולכן יש אינסוף פתרונות

אם $a=-1$ המטריצה היא

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a & | & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -2 \end{pmatrix}$$

במקרה זה קיבלנו שורת סתירה, ולכן אין פתרון למערכת.

ב. מצאו את הפתרון הכללי למערכת המשוואות עבור $a = 2$

נציב במערכת לאחר הדירוג את $a = 2$ ונדרג אותה קנונית

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{3}R_3]{R_1+R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{-R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{R_2-R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

המשתנה w הוא חופשי נציב בו פרמטר $w = t$ ונקבל

$$x = t$$

$$y = \frac{2}{3} - 4t$$

$$z = \frac{1}{3} + t$$

והפתרון הכללי הוא

$$\left(t, \frac{2}{3} - 4t, \frac{1}{3} + t, t\right) = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) + t(1, -4, 1, 1)$$

ג. האם יש ערך של a עבורו $(1, -1, 1, 0)$ הוא פתרון למערכת המשוואות? הוכיחו תשובתכם.

נציב את הפתרון בכל המשוואות, ונראה האם קיים a עבורו כולן מתקיימות:

$$\begin{cases} 1 - 1 + 1 + a \cdot 0 = 1 \\ 1 - 1 + a^2 \cdot 1 - 0 = a \\ a \cdot 1 - 1 + 1 + 0 = 1 \end{cases}$$

המשוואה הראשונה מתקיימת לכל a, השנייה אם $a^2 = a$ והשלישית אם $a = 1$

סה"כ, אם $a = 1$ שלושת המשוואות מתקיימות, ו$(1, -1, 1, 0)$ הוא אכן פתרון למערכת.

<u>שאלה 2</u> תהי העתקה לינארית $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ המקיימת $T(1,0) = (1,0)$

א. חשבו את $T(3,0)$

$$T(3,0) = T(3 \cdot (1,0)) \overset{T \text{ העתקה לינארית}}{=} 3 \cdot T(1,0) = 3 \cdot (1,0) = (3,0)$$

ב. נסמן $T(0,1) = (a, b)$, הביעו את המטריצה המייצגת $[T]$ באמצעות הפרמטרים a, b.

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

ג. אם נתון שמטריצה המייצגת $[T]$ <u>אינה</u> הפיכה, הוכיחו כי היא לכסינה.

נשתמש בסימון מסעיף קודם ונמצא ש

$$\det([T]) = b$$

לכן אם המטריצה אינה הפיכה, הדטרמיננטה שלה היא אפס, כלומר $b = 0$

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נמצא את הע"ע באמצעות הפולינום האופייני

$$\det\begin{pmatrix} 1-x & a \\ 0 & -x \end{pmatrix} = -(1-x)x = 0$$

הע"ע הם אפס ואחד, לכל אחד מהם יש ו"ע ולכן המטריצה לכסינה.

ד. אם נתון שהמטריצה המייצגת $[T]$ <u>אינה</u> לכסינה, חשבו את הדטרמיננטה $\det([T])$.

שוב נשתמש בסימון מסעיף ב' ונחשב את הע"ע של $[T]$

$$\det\begin{pmatrix} 1-x & a \\ 0 & b-x \end{pmatrix} = (1-x)(b-x) = 0$$

והע"ע הם $1, b$.

אם הע"ע היו שונים, המטריצה הייתה לכסינה, ולכן בהכרח $b = 1$.

מכאן,

$$\det([T]) = \det\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

<u>שאלה 3</u> יהי פרמטר $a \in \mathbb{R}$ ונביט בפונקציה $f(x,y) = x^2 + 2xy + ay^2$

א. מצאו את משוואת המישור המשיק לפונקציה בנקודה $(1,1)$. הביעו תשובתכם באמצעות הפרמטר a.

נחשב את הנגזרות החלקיות

$$f_x = 2x + 2y$$
$$f_y = 2x + 2ay$$

לכן המישור המשיק בנקודה הוא מהצורה

$$z = f_x(1,1)x + f_y(1,1) + C = 4x + (2+2a)y + C$$

המישור צריך לעבור בנקודה

$$\left(1,1,f(1,1)\right) = (1,1,3+a)$$

לכן

$$3 + a = 4 + (2+2a) + C$$

$$-3-3a=C$$

והמישור הוא סה"כ

$$z=4x+(2+2a)y-3-3a$$

ב. מצאו ערך של הפרמטר a עבורו לפונקציה יש נקודת מינימום מקומי, הוכיחו תשובתכם.

נמצא נקודות קריטיות (חשודות)

$$f_x=2x+2y=0$$
$$f_y=2x+2ay=0$$

מהמשוואה הראשונה נקבל כי $y=-x$.

נציב במשוואה השנייה ונקבל כי $2x-2ax=0$ ולכן $2x(1-a)=0$.

אם נציב $x=0$ נקבל כי הנקודה $(0,0)$ חשודה.

אם $a=1$ תהיינה נקודות חשודות רבות, אך בקשו מאיתנו לבחור ערך אחד של a ולא לטפל במקרה הכללי,
לכן נמנע מלבחור $a=1$.

נחשב את הנגזרות השניות

$$f_{xx}=2$$
$$f_{yy}=2a$$
$$f_{xy}=2$$

$$\Delta(x,y)=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=2\cdot 2a-2^2=4a-4=4(a-1)$$

אם נבחר $a>1$, למשל $a=2$ נקבל כי $\Delta(0,0)>0$ ולכן מדובר בנקודת קיצון.

כיוון ש $f_{xx}(0,0)=2>0$ מדובר במינימום מקומי.

ג. מצאו ערך של הפרמטר a עבורו לפונקציה יש נקודת אוכף, הוכיחו תשובתכם.

נבחן $a<1$ למשל $a=0$ ונקבל כי $\Delta(0,0)<0$ ולכן מדובר בנקודת אוכף

<u>שאלה 4</u> לכל אחד מן התחומים הבאים, חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_D (x+y)dxdy$

א. $D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$

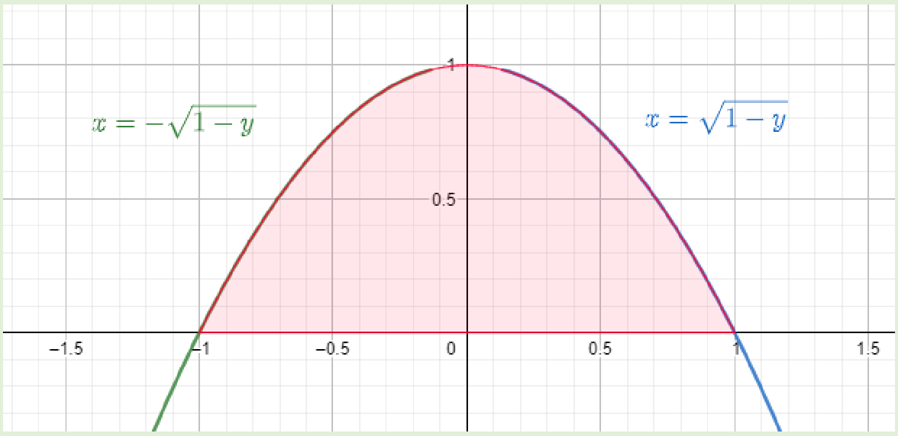
מדובר בתחום מלבני

$$\iint_D (x+y)dxdy=\int_0^1\left(\int_0^1 (x+y)dx\right)dy=\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}+yx\right)_0^1 dy=\int_0^1\left(\frac{1}{2}+y\right)dy=\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}y^2\right)_0^1=1$$

ב. $D = \{(x,y)|0 \le y \le 1, -\sqrt{1-y} \le x \le \sqrt{1-y}\}$

$$\iint_D (x+y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} (x+y)dx\right) dy$$

נשים לב שהתחום D הוא מהצורה הבאה:



נבודד את y כפונקציה של x ונגלה כי אפשר להציג את התחום D באופן הפוך על מנת לשנות את סדר האינטגרציה:

$$D = \{-1 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x^2\}$$

ולכן

$$\iint_D (x+y)dxdy = \int_{-1}^1 \left(\int_0^{1-x^2} (x+y)dy\right) dx = \int_{-1}^1 \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)_0^{1-x^2} dx = \int_{-1}^1 \left(x(1-x^2) + \frac{(1-x^2)^2}{2}\right) dx =$$

$$= \int_{-1}^1 \left(\frac{x^4}{2} - x^3 - x^2 + x + \frac{1}{2}\right) dx = \left(\frac{x^5}{10} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x\right)_{-1}^1 = \frac{2}{10} - \frac{2}{3} + \frac{2}{2} = \frac{8}{15}$$

ג. $D = \{(x,y)|x^2 + y^2 \le 1\}$

נעבור לקואורדינטות קוטביות כיוון שהתחום הינו מעגל היחידה.

$$\iint_D (x+y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (rcos\theta + rsin\theta)rd\theta\right) dr$$

$$\int_0^{2\pi} (rcos\theta + rsin\theta)rd\theta = r^2 \int_0^{2\pi} (cos\theta + sin\theta)d\theta = r^2(sin\theta - cos\theta)_0^{2\pi} = r^2(0 - 1 - (0-1)) = 0$$

ולכן גם

$$\iint_D (x+y)dxdy = \int_0^1 0 \cdot dr = 0$$