תחומי שלמות

הגדרה

תחום שלמות = חוג קומוטטיבי בלי מחלקי אפס[$\Leftrightarrow 0$ אידיאל ראשוני]

משפט

כל תחום שלמות מוכל בשדה(שדה השברים שלו).

דוגמאות

- $\mathbb{Z}$
- $\mathbb{F}[x]$
- $\mathbb{F}[x,y]$
- $\mathbb{F}[[x]]$

הגדרה

יהי $D \in \mathbb{Z}$, חופשי מריבועים.

$$\mathbb{Z}\left[\sqrt{D}\right] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \sqrt{D} \subseteq \mathbb{C}$$

נגדיר

$$O_D = \begin{cases} \mathbb{Z}\left[\sqrt{D}\right] & D \equiv 2,3 \pmod 4 \\ \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{D}}{2}\right] & D \equiv 1 \pmod 4 \end{cases}$$

הערה: נסמן $\alpha = \frac{1+\sqrt{D}}{2}$ כאשר $D \equiv 1 \pmod 4$

$$\alpha^2 - \alpha = \frac{1+\cancel{2\sqrt{D}}+D}{4} - \frac{1+\cancel{\sqrt{D}}}{2} = \frac{D-1}{4} \in \mathbb{Z}$$

לכן $\alpha^2 \in \mathbb{Z} + \alpha \subseteq \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$ הוא חוג $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$

טענה

יהי $\alpha \in \mathbb{C}$. נניח ש$\mathbb{Z} + \mathbb{Z}_\alpha$ חוג. אז קיים D כך ש$\alpha \in O_D$($\mathbb{Z} + \mathbb{Z}_\alpha \subseteq O_D$)

הוכחה

$\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\alpha$ חוג $\Leftrightarrow \alpha^2 \in \mathbb{Z}+\mathbb{Z}\alpha$
$\Leftarrow$ קיימים $a,b\in\mathbb{Z}$ כך ש

$$\alpha^2 = a + b\alpha$$

$$\alpha = \frac{b \pm \sqrt{b^2+4a}}{2}$$

נסמן $D = b^2+4a$. יש שתי אפשרויות:

- אם b זוגי, נכתוב $b=2c$, ואז

$$\alpha = \frac{2c \pm \sqrt{4c^2+4a}}{2} = c \pm \sqrt{c^2+a} \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{c^2+a}\right] \subseteq O_{c^2+a}$$

- אחרת, $D = b^2+4a \equiv 1 \pmod 4$, ואז

$$\alpha = \frac{b \mp 1}{2} \pm \frac{1+\sqrt{D}}{2} \in \mathbb{Z}+\mathbb{Z}\cdot\frac{1+\sqrt{D}}{2} = O_D$$

דוגמה

$A = \mathbb{Z}+\mathbb{Z}\cdot\frac{1+\sqrt{6}}{2}$ לא חוג:

$$\left(\frac{1+\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{6}+6}{2} = \frac{7}{2}+\sqrt{6}$$

$$-1-\sqrt{6} = \frac{1}{2} \notin A$$

לכן מגדירים $O_D = \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{D}}{2}\right]$ רק כאשר $D = 1 \pmod 4$

סיכום

$O_D = \begin{cases} \mathbb{Z}+\mathbb{Z}\sqrt{D} \\ \mathbb{Z}+\mathbb{Z}\frac{1+\sqrt{D}}{2} \end{cases}$ הם תחומי שלמות.

$$q\left(O_D\right) = \mathbb{Q}\left[\sqrt{D}\right] = \mathbb{Q}+\mathbb{Q}\sqrt{D}$$

הגדרה

נגדיר

$$T:\mathbb{Q}\left[\sqrt{D}\right]\to\mathbb{Q}$$

$$N:\mathbb{Q}\left[\sqrt{D}\right]\to\mathbb{Q}$$

לפי $\begin{matrix} T(x)=x+\overline{x} \\ N(x)=x\cdot\overline{x} \end{matrix}$ כאשר $\overline{a+b\sqrt{D}}=a-b\sqrt{D}$(צמוד)

צמוד: תכונות הצמוד:

1. $\overline{x+y}=\overline{x}+\overline{y}$
2. $\overline{x\cdot y}=\overline{y}\cdot\overline{x}$
3. $\overline{\overline{x}}=x$

לכן:

$$T(x)=x+\overline{x}=2a$$

$$N(x)=x\cdot\overline{x}=a^2-b^2D$$

T שומרת חיבור
N שומרת כפל
ולכן x,

$$x^2-T(x)x+N(x)=0$$

(זה משפט קיילי המילטון)

הערה

נניח ש$x=a+b\sqrt{D}\in O_D$.
(או $D\not\equiv 1 \pmod 4$ ו$a,b\in\mathbb{Z}$
או $D\equiv 1 \pmod 4$ ו$a,b\in\mathbb{Z}$, או $a,b\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}$)

$$T(x)=2a\in\mathbb{Z}$$

$$N(x)=a^2-b^2D\in\mathbb{Z}$$

כלומר הגדרנו $T:O_D\to\mathbb{Z}$ אדיטיבית ו$N:O_D\to\mathbb{Z}$ כפלית.

איברים הפיכים

$u \in R$ הפיך אם קיים $u' \in R$ כך ש$uu' = 1$

דוגמאות

- ב$\mathbb{Z}$: ± 1
- ב$\mathbb{F}[x]$: סקלרים
- ב$\mathbb{F}[[x]] = \left\{ \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right\}$: ההפיכים הם כל האיברים עם מקדם חופשי $0 \neq$
- בO_D: נניח שx הפיך, כלומר קיים x' כך ש$xx' = 1$ $\Leftarrow$ $N(x) \cdot N(x') = N(xx') = N(1) = 1$ $\Leftarrow$ $N(x) = \pm 1$. נכתוב $x = a + b\sqrt{D}$ כאשר $a, b \in \mathbb{Z}$ או $a, b \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ ($D \equiv 1 \pmod 4$)

$$N(x) = a^2 - b^2 D = \pm 1$$

נניח $D < 0$, אז $N(x) \geq 0$ וצריך לפתור $a^2 + |D| \cdot b^2 = 1$.
<u>הפתרונות הם:</u>

- $a = \pm 1$, $b = 0$
- $a = 0$, $b = \pm 1$, $D = -1$
- $a = \pm \frac{1}{2}$, $b = \pm \frac{1}{2}$, $D = -3$

$$O_{-1} = \mathbb{Z}\left[\sqrt{-1}\right] : \qquad \pm 1, \pm\sqrt{-1}$$

$$O_{-3} = \mathbb{Z}\left[\frac{1 + \sqrt{-3}}{z}\right] : \qquad \pm 1, \frac{\pm 1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$D \neq -1, -3$$

$$O_D : \qquad \pm 1$$

הערה

כאשר $D > 0$, $u(O_D) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

דוגמה

$1+\sqrt{2}\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ הפיך:

$$\left(1+\sqrt{2}\right)\left(-1+\sqrt{2}\right)=1$$

לכן $\left(1+\sqrt{2}\right)^{8}=577+408\sqrt{2}$

$$577^{2}=332929$$

$$2\cdot408^{2}=332928$$

$$a^{2}-2b^{2}=1$$