גבולות של פונקציות - המשך

$$E \subseteq X$$

$$f : E \to Y$$

$q = \lim_{x \to p} \in Y$, p נקודת גבול של E.

$\epsilon > 0$, קיים $\delta = \delta(\epsilon)$ חיובי כך ש $d(f(x), q) < \epsilon$ כאשר $d(x,p) < \delta$, $x \in E$. q נקבע באופן יחיד.

טענה

$f(x) \to q$ כאשר $x \to p$ אמ"ם לכל סדרה $\{x_n\} \subset E$ כך ש $x_n \to p$ מתקיים $f(x_n) \to q$

הוכחה

(א)$\Leftarrow$ נניח $f(x) \xrightarrow[x \to p]{} q$ ונניח ש$\{x_n\}$ סדרה בX כך ש$x_n \to p$. יהי $\epsilon > 0$ נתון, ויהי δ כמו בהגדרה. כיוון ש$x_n \to p$, קיים n^* טבעי כך ש$d(x_n, p) < \delta$ באשר $n > n^*$. לכן $d(f(n_n), q) < \epsilon$ באשר $n > n^*$ כלומר $f(x_n) \to q$

(ב)$\Rightarrow$ נתון שלכל סדרה $\{x_n\}$ בE השואפת לp, $f(x_n) \to q$. נניח בדרך השלילה ש$f(x) \nrightarrow q$ כאשר $x \to p$. ז"א קיים $\epsilon > 0$ שעבורו לכל $\delta > 0$ קיים $x_\delta \in E$ כך ש$d(x_p, p) < \delta$ ו$d(f(x_\delta), q) \geq \epsilon$. ניקח $\delta = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. נקבל x_n(הx_δ המתאים ל$\delta = \frac{1}{n}$) כך ש$f(x_n, p) < \frac{1}{n}$ ו$d(f(x_n), q) \geq \epsilon$.
$x_n \to p$ אבל $f(x_n) \nrightarrow q$ וזה סותר את הנתון ■

טענה

$f(x) \xrightarrow[x \to p]{} q$ אמ"ם <ins>לכל</ins> $F \subseteq E$ שעבורו p נק. גבול $f|_F(x) \to q$

הכיוון המעניין

אם $f(x) \xrightarrow[x \to p]{} q$ אזי $f|_F(x) \to q$.

נתון: $\epsilon > 0 \Leftarrow$קיים δ כך ש $d(f(x), q) < \epsilon$ וכאשר $d(x,p) < \delta$, $x \in E$.

$$x \in F \subseteq E, d(x,p) < \delta \Rightarrow d(f|_F(x), q) = d(f(x), q) < \epsilon$$

הגדרה

במקרה שY מרחב נורמי:

$$f : E \to Y, g : E \to Y$$

$$\forall_{x\in E} \left(f+g\right)\left(x\right) \doteqdot f\left(x\right)+g\left(x\right)$$

$$\lambda \in \mathbb{R}, x \in E \quad \left(\lambda f\right)\left(x\right) = \lambda f\left(x\right)$$

טענה

תהי p נקודת גבול של E. אם $f\left(x\right) \xrightarrow[x\to p]{} q \in Y$ ו$g\left(x\right) \xrightarrow[x\to p]{} r \in Y$ אזי $\left(f+g\right)\left(x\right) \xrightarrow[x\to p]{} q+r$, ו$\forall_{\lambda\in\mathbb{R}} \left(\lambda f\right)\left(x\right) \xrightarrow[x\to p]{} \lambda q$

הגדרה

אם $Y = \mathbb{R}^k$ וf, g נב"ל:

$$\forall_{x\in E} \left(fg\right)\left(x\right) \doteqdot f\left(x\right) g\left(x\right)$$

טענה

$$\left(fg\right)\left(x\right) \xrightarrow[x\to p]{} qr$$

הוכחה

$$\left|f\left(x\right)g\left(x\right) - qr\right| = \left|f\left(x\right)\left(g\left(x\right)-r\right) + \left(r\left(f\left(x\right)-q\right)\right)\right| \le \|f\left(x\right)\|\|g\left(x\right)-r\|+\|f\left(x\right)-q\|\|r\| \to 0$$

אם $q \neq 0$ $f\left(x\right) \xrightarrow[x\to p]{} q$ אזי $f\left(x\right) \neq 0$ בסביבה של p. יהי $\epsilon < \frac{\|p\|}{2}$. יהי $\delta = \delta\left(\epsilon\right)$ המתאים בהגדרה עבור $d\left(x,p\right) < \delta$ $\left(\forall x \in E\right)$ ומתקיים:

$$d\left(f\left(x\right), q\right) = \|f\left(x\right) - q\| < \epsilon < \frac{\|p\|}{2}$$

$$\|f\left(x\right)\| = \|q - \left(q - f\left(x\right)\right)\| \ge \|q\| - \|q - f\left(x\right)\| > \|q\| - \frac{\|q\|}{2} = \frac{\|q\|}{2} > 0$$

תוצאה

נניח ש־$f,g:E\to\mathbb{R}$, p נקודת גבול של E. נניח $f(x)\to q\neq 0$ ו־$g(x)\to r$ כאשר $x\to p$. $\frac{g(x)}{f(x)} \doteqdot \left(\frac{g}{f}\right)(x)$ מוגדרת היטב בסביבה של p, ו־$\frac{g}{f}(x)\xrightarrow[x\to p]{}\frac{r}{q}$.

הוכחה

מספיק להוכיח ש־$\frac{1}{f}\to\frac{1}{q}$. יחד עם מקרה של מכפלה פנימית מקבלים את התוצאה הכללית

$$\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{q}\right|=\frac{q-f(x)}{|f(x)q|}$$

עבור $\frac{\|q\|}{2}>\epsilon$, נבחר δ כנ"ל, אזי בסביבה $B_E(p,\delta)$ $\|f(x)\|>\frac{\|q\|}{2}$

$$\left|\frac{1}{f(x)}\leq\frac{1}{q}\right|\leq\frac{|q-f(x)|}{\frac{|q|}{2}|q|}\leq\frac{2\epsilon}{|q|^2}\Rightarrow\frac{1}{f(x)}\xrightarrow[x\to p]{}\frac{1}{q}$$

במקרה ש־Y מרחב נורמי

תהי $F:E_{\subseteq X}\to\mathbb{R}^k$. תהי p נק. גבול של E. $\lim_{x\to p}f(x)=q$ אמ"ם $f(x)\xrightarrow[x\to p]{}q_i$ לכל $1\leq i\leq k$

הוכחה

נתון $\lim_{x\to p}=q$.$|f(x)_i-q_i|\leq\|f(x)-q\|<\epsilon$(לכל נורמה שנבחר) כאשר $d(x,p)<\delta$ עבור $\delta>0$ מתאים, ז"א $\forall_i f(i)_i\to q$

הכיוון ההפוך

נתון $\forall_i f(x)_i\to q_i$.

$$\|f(x)-q\|_2\doteqdot\left\{\sum_{i=1}^{k}[f(x)_i-q_i]^2\right\}^{\frac{1}{2}}\xrightarrow[x\to p]{}0$$

רציפות

הגדרה

X,Y מרחבים מטריים, $f:E_{\subseteq X}\to Y$, $p\in E$.

נאמר שf רציפה בנק. p אם כל $\epsilon > 0$ קיים $\delta = \delta(\epsilon)$ חיובי כך ש$d(f(x), f(p)) <$ ϵ לכל $x \in E$ כך ש$d(x,p) < \delta$.

הערות

1. אם $p \in E$ נקודת גבול של E, אזי ע"י השוואת הגדרות רואים שf רציפה בנק' p אמ"ם $\exists \lim\limits_{x \to p} f(x) = f(p)$.
2. אם קיימת $p \in E$ לא נקודת גבול, כלומר קיימת סביבה $B(p,\delta)$ שלא מכילה אף נק. של E פרט לp, לכל $\epsilon > 0$ נבחר את הδ הנ"ל. אזי אם $x \in E$ בסביבה זו, הבכרח $x = p$ ולכן
$$d(f(x), f(p)) = d(f(p), f(p)) = 0 < \epsilon$$
כלומר כל פונקציה f היא רציפה בנק. המבודדות של E.

מסקנות ממשפטי הגבולות

- אם $f, g : E \to Y$ רציפות בנק. p, אזי $f + g$ רציפה בp.
- λf רציפה בנק. p.
- $Y = \mathbb{R}^k$ וf, g רציפות גם כן, אזי fg רציפה בנק. p.
- אם $f, g : E \to \mathbb{R}$ רציפות בנק. p, ו$f(p) \neq 0$, אזי $\frac{g}{f}$מוגדרת בסביבה של p ורציפה בנקודה p.
- אם $f : E \to \mathbb{R}^k$ אזי f רציפה בנק. $p \in E$ ברכיבים f_i רציפה בנק. p לכל $1 \leq i \leq k$.