הערה

פונקציונל לינארי על $\mathbb{R}^k$ הוא פונקציה רציפה

הוכחה

אם L פ"ל על $\mathbb{R}^k$, צורתו היא $Lh = h \cdot a$ (עבור $a \in \mathbb{R}^k$ יחיד).

$$h, h' \in \mathbb{R}^k, \|\cdot\| = \|\cdot\|_2$$

$$|Lh - Lh'| = |L(h-h')| = |(h-h')a|$$

לפי א"ש קושי שוורץ:

$$\leq \|h-h'\|\|a\| \xrightarrow[h' \to h]{} 0$$

$\Leftarrow$רציפות בכל נקודה h.

אפיינו רציפות במ"ש על $\mathbb{R}^k$. אם $\epsilon > 0$ נתון, ו$a \neq 0$ (אם $a = 0$, $L = 0$ והכל טריוויאלי) נבחר $\delta = \dfrac{\epsilon}{\|a\|}$ ואז, כאשר $\|h'-h\| < \delta$, $|Lh - Lh'| < \delta\|a\| = \epsilon$.

תזכורת

פונקציה ממשית f המוגדרת בסביבת הנק' הנתונה $x \in \mathbb{R}^k$ היא דיפרנציאבילית בנק' x אם קיים פ"ל L על $\mathbb{R}^k$ כך ש$f(x+h) - f(x) = Lh + o(\|h\|)$ (פונקציהשל h, $h \to \varphi(h)$, המקיימת $\dfrac{\varphi(h)}{\|h\|} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$, $\varphi(0) = 0$.

ראינו

f דיפרנציאבילית בנק' $x$$\Leftarrow$

א) f רציפה בנק' x.

ב) $\nabla f|_x$ קיים, ומתקיימת הנוסחה h_i $\displaystyle \boxed{df|_x h = h \cdot \nabla f|_0} = \sum_{i=1}^{k} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_x h_i$

$L = df|_x = \cdots = df(x)$ נקבע באופן יחיד, ונקרא הדיפרנציאל של f בנק' x

תנאי מספיק לדיפרנציאביליות

משפט

תהי f פונקציה ממשית המוגדרת בסביבה של נק' x נתונה ב$\mathbb{R}^k$, ונניח ש∇f קיימת בסביבה של x ורציפה בנק' x. אזי f דיפרנציאבילית בנק' x (ו$df|_x h = h \cdot \nabla f|_x$)

הוכחה

f מוגדרת בסביבה $B(x,r)$ ($r>0$). ניקח $h\in\mathbb{R}^k$ כך ש $\|h\|<r$ (על כן $x+h\in B(x,r)$, $\|(x+h)-x\|=\|h\|<r$). $f(x+h)-f(x)$ מוגדר היטב. נגדיר:

$$h^0=0, h^i=(h_1,...h_i,0,...0) \quad i<k$$

$$h^k=(h_1,...h_k)=h$$

$$\|h^i\|=\left(\sum_{j=1}^{i}|h_j|^2\right)^{1/2}\le\left(\sum_{j=1}^{k}|h_j|^2\right)^{1/2}\doteqdot\|h\|<r$$

לכן $x+h\in B(x,r)$.

$$f(x+h)-f(x)=f\left(x+h^k\right)-f\left(x+h^0\right)=\sum_{i=1}^{k}\left[f\left(x+h^i\right)-f\left(x+h^{i-1}\right)\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\left[f\left(x+h^{i-1}+h_ie^i\right)-f\left(x+h^{i-1}\right)\right]$$

<u>נגדיר</u>:

$$F(t)=f\left(x+h^{i-1}+te^i\right)$$

t ממשי, t בין 0 לh

$$\|\left(x+h^{i-1}+te^i\right)-x\|=\|h^{i-1}+te^i\|=\left(\sum_{j=1}^{i-1}|h_j|^2+t^2\right)^{1/2}\le\left(\sum_{j=1}^{i}|h_j|^2\right)^{1/2}$$

$$t^2\le h_i^2, \quad h^i=(h_1,...h_{i-1},0,...0))+\underbrace{(0,...0,h_i,0,...0)}_{=h_ie^i}$$

לכן F_i מוגדרת היטב עבור t בין 0 לh_i. F_i' קיימת עבור tים בסביבת $t=0$ (לפי הנחת המשפט ש$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ קיימת בסביבה של x). על פי משפט הערך הממוצע לפונקציות במשתנה אחד, קיימת נקודה בין 0 לh_i (θ_ih_i עם $0\le\theta_i\le1$ מתאים) כך ש $\boxed{F_i(h_i)-F_i(0)=h_iF'(\theta_ih_i)}$

$$F_i'(t)=\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x+h^{i-1}+t} \qquad F_i'(\theta_ih_i)=\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x+h^{i-1}+\theta_ih_i\right)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)+q_i(h)$$

$$q_i(h)\doteqdot\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x+h^{i-1}+\theta_jh_i\right)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

ולכן

$$f\left(x+h\right)=\sum_{i=1}^{k}\left[F_{i}\left(h_{i}\right)-F_{i}\left(0\right)\right]=\sum_{i=1}^{k}h_{i}F_{i}'\left(\theta_{i}h_{i}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{k}h_{i}\frac{\partial f}{\partial x_{i}}\left(x\right)+\sum_{i=1}^{k}h_{i}q_{i}\left(h\right)=h\cdot\left.\nabla f\right|_{x}+h\cdot q\left(h\right)=Lh+\varphi\left(h\right)$$

כדי לגמור את הוכחת הדיפרנציאביליות של f בנק' x, נשאר להוכיח ש- $\varphi\left(h\right)$ $o\left(\left\Vert h\right\Vert \right)$. $\varphi\left(0\right)=0$ טריוויאלי עבור $h\neq0$ עם נורמה קטנה.

$$\frac{\left|\varphi\left(h\right)\right|}{\left\Vert h\right\Vert }=\frac{\left|h\cdot q\left(h\right)\right|}{\left\Vert h\right\Vert }\leq\frac{\left\Vert h\right\Vert \left\Vert q\left(h\right)\right\Vert }{\left\Vert h\right\Vert }=i\leq k$$

בגלל רציפות , $q_{i}\left(h\right)\xrightarrow[h\to0]{}0$ לכל i, ולכן $\left\Vert q\left(h\right)\right\Vert \xrightarrow[h\to0]{}0$ ולכן $\frac{\varphi\left(h\right)}{\left\Vert h\right\Vert }\xrightarrow[h\to0]{}0$. מש"ל.

תכונות בסיסיות של דיפרנציאביליות

תהיינה f,g פונקציות ממשיות המוגדרות בסביבה של נק' נתונה x ב-$\mathbb{R}^{k}$. נניח ששתיהן דיפרנציאביליות בנק' x. אזי:

א) $f+\lambda g$ (λ קבוע) דיפרנציאבילית בנק' x. $\left.d\left(f+\lambda g\right)\right|_{x}=\left.df\right|_{x}+\lambda\left.dg\right|_{x}$.

ב) fg דיפרנציאבילית בנק' x ו-$\left.d\left(fg\right)\right|_{x}=f\left(x\right)\left.dg\right|_{x}+g\left(x\right)\left.df\right|_{x}$.

ג) אם $g\left(0\right)\neq0$, אזי $\frac{f}{g}$ דיפרנציאבילית בנק' x, ו-$\left.d\left(\frac{f}{g}\right)\right|_{x}=\frac{1}{g\left(x\right)^{2}}\left[g\left(x\right)\left.df\right|_{x}-f\left(x\right)\left.dg\right|_{x}\right]$

דוגמה

$$F\left(x,y\right)=\frac{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}{x^{2}+y^{2}}$$

$$dF=\frac{1}{\left(x^{2}+y^{2}\right)^{2}}\left[\left(x^{2}+y^{2}\right)d\arctan\left(\frac{y}{x}\right)-\arctan\left(\frac{y}{x}\right)d\left(x^{2}+y^{2}\right)\right]h$$

$$=\frac{1}{\left(x^{2}+y^{2}\right)^{2}}\left[\left(x^{2}+y^{2}\right)h\nabla\arctan\left(\frac{y}{x}\right)h\cdot\nabla\left(x^{2}+y^{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^2}\left\{\left(x^2+y^2\left[h_1\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}+h_2\frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right]-\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\left[h_1 2x+h_2 2y\right]\right)\right\}$$

כלל השרשרת

נתונה פונקציה ממשית f, דיפרנציאבילית בנק' נתונה ב$\mathbb{R}^k$. נתונה פונקציה וקטורית $x(\cdot):(t_0-\delta,t_0+\delta)$(של המשתנה היחיד t הממשי) עם טווח מוכל ב$B\left(x^0,r\right)$. נניח ש$x'\left(t_0\right)$ קיימתץ

<u>אזי</u>: $f\circ x \doteqdot f\left(x\left(\cdot\right)\right)$ גזירה בנק' t_0, ונכונה הנוסחה: $\left(f\circ x\right)'\left(t_0\right)=df|_x\, x'\left(t_0\right)$

הערה $x'\left(t_0\right)$ מוגדר כרגיל ע"י $x'\left(t_0\right)=\lim_{t\to t_0}\frac{x\left(t\right)-x\left(t_0\right)}{t-t_0}$(כאשר הגבול קיים)..

קיום הנגזרת $x'\left(t_0\right)$ שקול לקיום כל הנגזרות של הרכיבים בנק' t_0, ז"א

$$x_t\left(t_0\right)=\lim_{t\to t_0}\frac{x_i\left(t\right)-x_i\left(t_0\right)}{t-t_0}\forall i=1,...k$$

נמשיך:

$$\left(f\circ x\right)'\left(t_0\right)=df|_x\, x'\left(t_0\right)=x'\left(t_0\right)\cdot\nabla f|_{x^0}=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^0_{=x\left(t_0\right)}\right)x_i'\left(t_0\right)$$

דוגמה

$$f\left(x,y\right)=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$x\neq 0$$

$$x\left(t\right)=\left(x,y\right)\left(t\right)=\left(R\cos t,R\sin t\right)$$

$$\left(f\circ x\right)\left(t\right)=\arctan\left(\frac{R\sin t}{R\cos t}\right)=\arctan\left(\tan t\right)=t$$

$$\left(f\circ x\right)'\left(t\right)=1$$

מאידך, לפי כלל השרשרת

$$(f \circ x)'(t) = \left.\frac{-y}{x^2+y^2}\right|_{(R\cos t, R\sin t)'} (-R\sin t) + \frac{x}{x^2+y^2}(R\cos t)$$

$$= \frac{(-R\sin t)(-R\sin t)}{R^2} + \frac{(R\cos t)(R\cos t)}{R^2}$$