אלגברה לינארית 1 - שיעור חזרה

מבחן תשע"ז, מועד ב', שאלה 3

תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ הפיכה. הוכיחו כי קיימת $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש-$\operatorname{rank}(B)=1$ וגם $\det(A+B)=1$.

פתרון:

A הפיכה $\Leftarrow$ $\det(A)\neq 0$.

ניקח דוגמה -

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \leftarrow \text{אפשר לבחור } B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix} \leftarrow B=\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} \leftarrow ?$$

$$B=\begin{pmatrix}— & u & —\\ — & 0 & —\\ & \vdots & \\ — & 0 & —\end{pmatrix} \qquad \underbrace{A+B=\begin{pmatrix}— & R_1(A)+u & —\\ — & R_2(A) & —\\ & \vdots & \\ — & R_n(A) & —\end{pmatrix}}$$

$$\det(A+B)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{מולטילינאריות}}}{=}\det(A)+\det\begin{pmatrix}— & u & —\\ — & R_2(A) & —\\ & \vdots & \\ — & R_n(A) & —\end{pmatrix}=(*)$$

ניקח $\underline{u=\alpha R_1(A)}$, ונקבל

$$(*)=\det(A)+\det\begin{pmatrix}— & \alpha R_1(A) & —\\ — & R_2(A) & —\\ & \vdots & \\ — & R_n(A) & —\end{pmatrix}=\det(A)+\alpha\det(A)=$$

$$=(1+\alpha)\underset{\substack{\neq\\0}}{\det(A)}$$

רוצים $(1+\alpha)\cdot\det(A)=1 \Leftarrow \alpha=\frac{1}{\det(A)}-1$.

מה קורה אם $\det(A)=1$? $\alpha=0 \Rightarrow B=0 \Rightarrow \mathrm{rank}(B)=0$.

<u>אם $\det(A)\neq 1$</u> – נבחר B כנ"ל, כלומר

$$B=\begin{pmatrix} — & \left(\frac{1}{\det(A)}-1\right)R_1(A) & — \\ — & 0 & — \\ & \vdots & \\ — & 0 & — \end{pmatrix}$$

ואז $\mathrm{rank}(B)=1$, $\det(A+B)=1$.

<u>אם $\det(A)=1$</u> – ניקח

$$B=\begin{pmatrix} — & R_2(A) & — \\ — & 0 & — \\ & \vdots & \\ — & 0 & — \end{pmatrix}$$

$$\det(A+B)=\det\begin{pmatrix} — & R_1(A)+R_2(A) & — \\ — & R_2(A) & — \\ & \vdots & \\ — & R_n(A) & — \end{pmatrix}=$$

$$\overset{\text{מולטילינאריות}}{=}\det(A)+\underbrace{\det\begin{pmatrix} — & R_2(A) & — \\ — & R_2(A) & — \\ & \vdots & \\ — & R_n(A) & — \end{pmatrix}}_{0}=1$$

סמסטר קיץ תשע"ג, מועד ב, שאלה 5

א. מצאו מטריצה הפיכה $A\in\mathbb{R}^{3\times3}$ המקיימת $A=adj(2A)$.

ב. מצאו מטריצה הפיכה $A\in\mathbb{C}^{4\times4}$ המקיימת $A=adj(-2A)$.

פתרון:

א. A הפיכה $\Leftarrow$ $2A$ הפיכה $\Leftarrow$ $adj(2A)=det(2A)\cdot(2A)^{-1}$

$$\overset{\shortparallel}{2^3\cdot det(A)\cdot\frac{1}{2}\cdot A^{-1}}=4\cdot det(A)\cdot A^{-1}=A \qquad |\cdot A$$

$$\boxed{A^2=4\cdot det(A)\cdot I_3}=\begin{pmatrix}4det(A)&0&0\\0&4det(A)&0\\0&0&4det(A)\end{pmatrix}$$

נפעיל det על שני האגפים:

$$det(A^2)=det(\underbrace{4\cdot det(A)}_{\alpha}\cdot I)$$

$$det(\alpha A)=\alpha^n det(A)$$

כפליות det

$$det(A)^2=4^3\cdot det(A)^3 \qquad \begin{array}{l}|:4^3\\|:det(A)^2\end{array}$$

$$\boxed{det(A)=\frac{1}{64}}$$

אפשר לחפש $A=\alpha I=\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\0&\alpha&0\\0&0&\alpha\end{pmatrix}$

$$\alpha^3=det(A)=\frac{1}{64}\Rightarrow\alpha=\frac{1}{4}$$

נבחר $A=\frac{1}{4}I$.

$$adj(2A)=adj\left(\frac{1}{2}I\right)=det\left(\frac{1}{2}I\right)\cdot\left(\frac{1}{2}I\right)^{-1}=\frac{1}{8}\cdot(2I)=\frac{1}{4}I=A$$

$adj(\alpha A)=\alpha^{n-1}\cdot adj(A)$

$adj(A)=det(A)\cdot A^{-1}$ כש-A הפיכה.

ב. $A\in\mathbb{C}^{4\times4}$, $A=adj(-2A)$

נחפש $A=\beta I$.

$\beta I = A = adj(-2A) = adj(-2\beta I) = det(-2\beta I)\cdot(-2\beta I)^{-1} =$

$$= (-2\beta)^4 \cdot \frac{1}{-2\beta}\cdot I = (-2\beta)^3 I$$

$\beta = \pm\sqrt{-\frac{1}{8}} = \pm\sqrt{\frac{1}{8}}\, i$. $\Leftarrow$ $\beta^2 = -\frac{1}{8}$ $\underset{\beta\neq 0}{\Leftarrow}$ $\beta = (-2\beta)^3 = -8\beta^3$

כי A הפיכה

מבחן תשע"ה, מועד א', שאלה 4

נתונה $A = \begin{pmatrix}1&2&0\\-1&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}$, בסיס $B=\{1+x^2, -1+x, x-x^2\}$ של $\mathbb{R}_2[x]$.

א. מצאו במפורש העתקה T שעבורה $[T]_B^B = A$.

ב. מצאו בסיס C שעבורו מתקיים $A=[I]_C^B$.

פתרון:

מחפשים ל $T:\mathbb{R}_2[x]\longrightarrow\mathbb{R}_2[x]$.

$$\begin{pmatrix} | & | & | \\ [T(1+x^2)]_B & [T(-1+x)]_B & [T(x-x^2)]_B \\ | & | & | \end{pmatrix} = [T]_B^B = \begin{pmatrix}1&2&0\\-1&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}$$

$[T(1+x^2)]_B = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \Longrightarrow T(1+x^2) = 1\cdot(1+x^2) - 1\cdot(-1+x) + 2\cdot(x-x^2) =$

$= 1+x^2+1-x+2x-2x^2 =$

$= 2+x-x^2$

$[T(-1+x)]_B = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow T(-1+x) = 2(1+x^2)+1\cdot(x-x^2) = 2+x+x^2$

$$[T(x-x^2)]_B = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow T(x-x^2) = -1+x$$

יהי $a+bx+cx^2\in\mathbb{R}_2[x]$. נחפש $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ שעבורם

$$\alpha(1+x^2)+\beta(-1+x)+\gamma(x-x^2) = a+bx+cx^2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & -1 & c \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & -1 & c-a \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[R_3\leftarrow R_3-R_2]{R_1\leftarrow R_1+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a+b \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & -2 & c-a-b \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a+b \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a+b-c}{2} \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right) \begin{array}{l} \alpha = \\ \beta = \\ \gamma = \end{array}$$

$$T(a+bx+cx^2) = \alpha \underbrace{T(1+x^2)} + \beta \underbrace{T(-1+x)} + \gamma \underbrace{T(x-x^2)}$$

ב. מצאו בסיס C של $\mathbb{R}_2[x]$ שעבורו $A=[I]^B_C$.

$$\parallel$$

$$\begin{pmatrix} | & | & | \\ [1+x^2]_C & [-1+x]_C & [x-x^2]_C \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

מה עשו? נהפוך את A כדי לקבל

לפי משפט מההרצאה

$$A^{-1} = [I]_B^C = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [v_1]_B & [v_2]_B & [v_3]_B \\ | & | & | \end{pmatrix} \qquad C=\{v_1,v_2,v_3\}$$

לפי האלגוריתם להפיכת מטריצה, נדרג את $(A|I)$:

$$\underbrace{\left(\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{matrix}\right.}_{A}\left|\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I}\right) \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1]{R_2 \leftarrow R_2 + R_1} \left(\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftarrow -\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & -1/3 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2]{R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2} \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right|\left.\underbrace{\begin{matrix} -1/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & -1/3 \\ -1/3 & 1 & 2/3 \end{matrix}}_{A^{-1}}\right)$$

לכן

$$\begin{pmatrix} | & | & | \\ [v_1]_B & [v_2]_B & [v_3]_B \\ | & | & | \end{pmatrix} = [I]_B^C = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & -1/3 \\ -1/3 & 1 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$[v_1]_B = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \Longrightarrow v_1 = -\frac{1}{3}(1+x^2) + \frac{2}{3}(-1+x) - \frac{1}{3}(x-x^2) =$$

$$= -1 + \frac{1}{3}x$$

$$v_2 = x - x^2$$

$$v_3 = \frac{2}{3}(1+x^2) - \frac{1}{3}(-1+x) + \frac{2}{3}(x-x^2) =$$

$$= 1 + \frac{1}{3}x$$

$$C = \left\{-1+\frac{1}{3}x,\ x-x^2,\ 1+\frac{1}{3}x\right\}$$

מבחן תשע"ז, מועד א', שאלה 2

$A \in \mathbb{R}^{5\times5}$.

$CF(A) =$ הצורה הקנונית, $rank =$ דרגה.

הוכיחו/הפריכו:

א. ב-$CF(A)$ יש שורת אפסים $\Longleftrightarrow$ ב-$CF(A^2)$ יש שורת אפסים.

<u>פתרון:</u>

$$\begin{array}{c} \text{משתנה חופשי} \\ \downarrow \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כיוון ש-A ריבועית, A הפיכה $\Longleftrightarrow$ ב-$CF(A)$ אין שורת אפסים

$\Updownarrow$

$CF(A)=I_n$

ב-$CF(A)$ יש שורת אפסים $\Longleftrightarrow$ A לא הפיכה

$\Updownarrow$

ב-$CF(A^2)$ יש שורת אפסים $\Longleftrightarrow$ A^2 לא הפיכה

אם למטריצה יש עמודת אפסים - היא לא הפיכה. לא ההפך!
כלומר, יש מטריצות לא הפיכות בלי עמודת אפסים.
אם A <u>מדורגת (קנונית)</u>: A לא הפיכה $\Longleftrightarrow$ יש ב-A שורת אפסים

ב. אם ב-$CF(A)$ יש <u>בדיוק</u> שתי שורות אפסים, אז גם ב-$CF(A^2)$ יש <u>בדיוק</u> שתי שורות אפסים.

<u>הפרכה:</u>

$$\cancel{\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

✓

$A\in\mathbb{R}^{5\times 5}$

ג. אם $\operatorname{rank}(A)>2$ אז $A^2\neq 0$.

<u>הוכחה:</u>

נניח בשלילה $A^2=0$.

$$A\cdot A=A\cdot\begin{pmatrix}| & & |\\ C_1(A) & \cdots & C_5(A)\\ | & & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}| & & |\\ A\cdot C_1(A) & \cdots & A\cdot C_5(A)\\ | & & |\end{pmatrix}=0$$

$$A\cdot C_i(A)=0 \Rightarrow C_i(A)\in N(A) \Rightarrow C(A)\subseteq N(A).$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\dim C(A)}_{=\operatorname{rank}(A)}\leq \dim N(A)\underset{\text{משפט הדרגה}}{=}5-\dim C(A)=5-\operatorname{rank}(A)$$

$2\operatorname{rank}(A)\leq 5 \longrightarrow$ סתירה.

ד. אם $\operatorname{rank}(A^2)=4$ אז $\operatorname{rank}(A)=4$.

$$4=\operatorname{rank}(A^2)\leq \operatorname{rank}(A)\leq 5$$

משפט

$\operatorname{rank}(AB)\leq \operatorname{rank}(A),\operatorname{rank}(B)$

אם $\operatorname{rank}(A)=5 \Leftarrow A$ הפיכה $\Leftarrow A^2$ הפיכה $\Leftarrow \operatorname{rank}(A^2)=5$ בסתירה.

סמסטר קיץ תשפ״ב, מועד ב׳, שאלה 5

נגדיר

$$W=\left\{A\in\mathbb{F}^{n\times n}\ \middle|\ \sum_{j=1}^{n}C_j(A)=0\right\}$$

א. הוכיחו שזה תת-מרחב של $\mathbb{F}^{n\times n}$ ומצאו את מימדו.

הוכחה:

הוכחה שזהו תת-מרחב - לפי הקריטריון המקוצר:

← $0\in W$,

← אם $A_1,A_2\in W$ ו- $\alpha\in\mathbb{F}$, אז $A_1+\alpha A_2\in W$

$$\sum_{j=1}^{n}C_j(A_1+\alpha A_2)=\sum_{j=1}^{n}\left(C_j(A_1)+\alpha C_j(A_2)\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}C_j(A_1)+\alpha\sum_{j=1}^{n}C_j(A_2)=0$$

נחשב את $\dim W$.

$$W=\left\{\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{n\times n}\ \middle|\ \begin{pmatrix}a_{11}+\cdots+a_{1n}\\ \vdots\\ a_{n1}+\cdots+a_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\right\}=$$

$$\left(=\left\{A\in\mathbb{F}^{n\times n}\ \middle|\ A\cdot\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\right\}\right)=\left\{\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\ \middle|\ \begin{cases}a_{11}+\cdots+a_{1n}=0\\ \vdots\\ a_{n1}+\cdots+a_{nn}=0\end{cases}\right\}$$

לכן אפשר לחשוב על W כעל מרחב הפתרונות של המערכת הבאה:

$$\begin{array}{cccccccccccc}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&\cdots&a_{n1}&\cdots&a_{nn}\\ \hline 1&1&\cdots&1&0&&&&&&&\\ 0&&&&1&1&\cdots&1&0&\cdots&&\\ &&&&&&&&\ddots&&&\\ &&&&&&&&&1&\cdots&1\end{array}\left|\begin{array}{c}0\\ \vdots\\ \\ 0\end{array}\right.$$

כן מערכת משוואות של n^2 משתנים, היא מדורגת ויש בה

n משתנים תלויים, n^2-n חופשיים. לכן $\boxed{\dim W = n^2-n}$

דוגמה - $n=2$

$$W=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in \mathbb{F}^{2\times 2} \,\middle|\, \begin{pmatrix} a \\ c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b \\ d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in \mathbb{F}^{2\times 2} \,\middle|\, \begin{matrix} a+b=0 \\ c+d=0\end{matrix}\right\}$$

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

ב. הוכיחו/הפריכו: לכל $A,B\in W$ מתקיים $A\cdot B\in W$?

הוכחה:

$$\sum_{j=1}^{n} C_j(AB)=\sum_{j=1}^{n} A\cdot C_j(B)=A\cdot\sum_{j=1}^{n} C_j(B)\underset{B\in W}{=}A\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}=0$$

לכן $AB\in W$.

ג. הוכיחו/הפריכו: לכל $A,B\in W$ מתקיים $\dim\left(N(A)\cap N(B)\right)\geq 1$.

הוכחה:

לכל $A\in W$, $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}\in N(A)$, כי

$$A\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}=\sum_{j=1}^{n} C_j(A)\underset{A\in W}{=}0$$

לכן $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}\in N(A)\cap N(B)$.

מבחן תשע"ט סמסטר א', מועד ג', 4 ג'+ד'

תהי $T:\mathbb{R}_2[x]\longrightarrow\mathbb{R}^{2\times2}$, ויהיו

$B=\{1,\ 1+x,\ x+x^2\}$ בסיס של $\mathbb{R}_2[x]$

$C=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס של $\mathbb{R}^{2\times2}$

בנוסף נתונה המטריצה המייצגת

$$[T]^B_C=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

ג. האם קיים בסיס D ל-$\mathbb{R}^{2\times2}$ שעבורו

$$[T]^B_D=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\ ?$$

פתרון:

אם יש D כזה, $[T]^B_D=\underbrace{[I]^C_D}_{\text{מטריצה הפיכה}}\cdot[T]^B_C$

נסמן $D=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$.

$[T]^B_D=\cdots \Longrightarrow$

$$\left.\begin{aligned}T(1)&=A_1\\T(1+x)&=A_2\\T(x+x^2)&=A_1+A_2\end{aligned}\right]$$

אם $\underline{T(x+x^2)=T(1)+T(1+x)}$, אז נבחר $A_1=T(1)$, $A_2=T(1+x)$.

נשלים אותם לבסיס D של $\mathbb{R}^{2\times2}$ ונקבל את הדרוש.

אחרת, אי-אפשר למצוא מטריצות כאלו.

האם זה נכון? מה נתון על $[T]_C^B$

$$[T(1)]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [T(1+x)]_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [T(x+x^2)]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

והשוויון הזה לא מתקיים. (כי $v=w \Leftrightarrow [v]_C = [w]_C$)

זה לא מתקיים - לכן אין בסיס כזה.

ד. האם קיים בסיס F של $\mathbb{R}_2[x]$ שעבורו $[T]_C^F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

<u>פתרון:</u>

אם היה בסיס כזה,

$$[T]_C^B = [T]_C^F \cdot [I]_F^B$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בסתירה.

$$R_i(AB) = R_i(A) \cdot B$$

$$\begin{pmatrix} — R_1(A) — \\ \vdots \\ — R_m(A) — \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} — R_1(A) \cdot B — \\ \vdots \\ — R_m(A) \cdot B — \end{pmatrix}$$