

.1

א. $u = x^3, v = y^3$. משוואת קושי רימן הראשונה היא אם $3x^2 = 3y^2$, והשנייה היא $0 = 0$

שמתקיימת תמיד. בסה"כ תנאי קושי רימן מתקיים בקבוצה $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^2\}$

ב. כאן $u = 2x, v = y$. משוואת קושי רימן הראשונה היא $2 = 1$ שאינה מתקיימת כלל. לכן אין שום נקודה בה תנאי קושי רימן מתקיים.

ג. $u = x^3 + y^5, v = 0$ משוואות קושי רימן הן $3x^2 = 0$ ו- $5y^4 = 0$, ולכן קושי רימן מתקיים אך ורק בנקודה $(0,0)$.

2. תהי $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות ונגדיר $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ לפי

$$f(z) = u(x+y) - iu(x-y)$$

הוכיחו כי f גזירה על הציר הממשי (ציר x).
פתרון: נסמן $f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ כלומר

$$U(x, y) = u(x+y), \quad V(x, y) = -u(x-y)$$

היות ש u גזירה ברציפות, נקבל שהנגזרות U_x, U_y, V_x, V_y קיימות ורציפות ולכן U, V דיפרנציאביליות בכל נקודה ובפרט על הציר הממשי. נותר לבדוק את קיום משוואות קושי רימן

$$U_x(x, y) = u'(x+y), \quad U_y(x, y) = u'(x+y)$$

$$V_x(x, y) = -u'(x-y) \quad V_y(x, y) = u'(x-y)$$

לכן

$$U_x(x, 0) = u'(x) = V_y(x, 0), \quad U_y(x, 0) = u'(x) = -V_x(x, 0)$$

כנדרש ולכן f גזירה על ציר x .

3. מצאו פונקציה $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ שגזירה אך ורק בנקודות $(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$.
פתרון: אם משוואות קושי רימן ייצאו לנו

$$x^2 + y^2 = 2 \quad x^2 = y^2$$

אז קל לראות שהנקודות שבהן הפונקציה גזירה הן רק הנקודות הרצויות. צריך למצוא פונקציה שאלו משוואות קושי רימן שלה.
נכתוב את המשוואות בתור

$$x^2 = 2 - y^2 \quad x^2 = y^2$$

נחליט ש $u_x = x^2$ ולכן $u = \frac{1}{3}x^3 + C(y)$ כאשר $C(y)$ היא פונקציה שתלויה רק ב y . כמו כן נחליט ש $u_y = y^2$ ולכן $u = \frac{1}{3}y^3 + C(x)$ כלומר בינתיים נראה שאפשר לקחת

$$u(x, y) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}y^2$$

בהתאמה נקבל לפי משוואות קושי רימן

$$v_y = 2 - y^2 \quad v_x = -x^2$$

ולכן

$$v(x, y) = 2y - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{3}x^3$$

כלומר הפונקציה

$$f(x, y) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}y^2 + i(2y - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{3}x^3)$$

מתאימה לדרישות.

4. תהי $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ פונקציה הגזירה בכל נקודה ב \mathbb{C} המקיימת כי בכל נקודה

$$u^2 - v^2 = c$$

כאשר c קבוע כלשהוא, הוכיחו כי f קבועה.
פתרון: אם נסמן

$$g(z) = (f(z))^2 = u^2 - v^2 + 2iuv$$

היות ש $\text{Re}(g)$ היא פונקציה קבועה, ו $g(z)$ גזירה, נקבל ש $g(z)$ קבועה. כלומר $(f(z))^2 = D$ קבוע. אם במקרה $D = 0$ סיימנו. אם לא, נסמן את שני השורשים של D בתור d_1, d_2 , זה מחייב שלכל ערך z

$$f(z) \in \{d_1, d_2\}$$

נותר להוכיח ש f שווה רק לאד משני הערכים האלה. נזכור ש $f(z)$ גזירה ולכן בוודאי רציפה. נניח בשלילה שקיימים z_1, z_2 כך ש $f(z_i) = d_i$. נבחר מסילה $\gamma(t)$ כלשהיא בין z_1 ל z_2 . לפי משפט ערך הביניים תמונתה תחת f היא מסילה בין d_1, d_2 אבל מצד שני $f(\gamma(t)) \subseteq \{d_1, d_2\}$ בסתירה. ולכן לכל z מתקיים $f(z) = d_1$ או $f(z) = d_2$ כלומר f קבועה כנדרש.

5. מצאו את כל הנקודות $z \in \mathbb{C}$ שבהן $f(z) = \bar{z}e^{-17z^2}$ גזירה. פתרון: נניח ש $f(z)$ גזירה בנקודה z_0 כלשהיא. נשים לב שהפונקציה e^{17z^2} גזירה בכל נקודה ולכן גם ב z_0 ולכן הפונקציה $f(z) \cdot e^{17z^2} = \bar{z}$ גזירה גם כן ב z_0 , אבל ידוע ש \bar{z} אינה גזירה באף נקודה. לכן גם $f(z)$ אינה גזירה באף נקודה.

6. נניח כי $f(z)$ גזירה בעיגול $\{z \mid |z| < R\}$ הוכיחו כי גם $\overline{f(\bar{z})}$ גזירה שם. פתרון: ראשית נשים לב ש $\overline{f(\bar{z})}$ מוגדרת בתחום המדובר כי $z \in \{z \mid |z| < R\} \Leftrightarrow \bar{z} \in \{\bar{z} \mid |\bar{z}| < R\}$ אם נכתוב

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$\overline{f(\bar{z})} = U(x, y) + iV(x, y)$$

אז בעצם

$$U(x, y) = u(x, -y) \quad V(x, y) = -v(x, -y)$$

ולכן U, V בוודאי דיפרנציאביליות כנדרש ובנוסף

$$U_x(x, y) = u_x(x, -y) = v_y(x, -y) = V_y(x, y)$$

$$U_y(x, y) = -u_y(x, -y) = v_x(x, -y) = -V_x(x, y)$$

כלומר משוואות קושי רימן מתקיימות כנדרש.

7. תהי $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ גזירה בתחום D בנוסף נניח ש u, v גזירות פעמיים ברציפות (בהמשך הקורס נראה שזה תנאי מיותר) ונניח שהפונקציה

$$g(x, y) = |f|^2 = u^2 + v^2$$

מקיימת

$$g_{xx} + g_{yy} = 0$$

הוכיחו כי קבועה ב D .
פתרון:נתחיל לחשב

$$g_x = 2uu_x + 2vv_x$$

$$g_{xx} = 2u_x^2 + 2uu_{xx} + 2v_x^2 + 2vv_{xx}$$

בדומה

$$g_{yy} = 2u_y^2 + 2uu_{yy} + 2v_y^2 + 2vv_{yy}$$

כלומר הנתון מלמד ש

$$2u_x^2 + 2uu_{xx} + 2v_x^2 + 2vv_{xx} + 2u_y^2 + 2uu_{yy} + 2v_y^2 + 2vv_{yy} = 0$$

אם נסדר זאת אחרת נקבל

$$u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2 + u(u_{xx} + u_{yy}) + v(v_{xx} + v_{yy}) = 0$$

נזכור ש f גזירה ולכן מתקיים $u_{xx} + u_{yy} = v_{xx} + v_{yy} = 0$ ולכן

$$u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2 = 0$$

כלומר כל הנגזרות החלקיות מתאפסות. היות ש D הוא תחום הפונקציה f קבועה.