

פיתרון תרגיל בית 7 במתמטיקה בדידה 2

83-118 סמסטר ב' תשע"ט

1. פתרו את נוסחאות הנסיגה הבאות:

(א) $M_n = 3M_{n-1} - 2M_{n-2}$ עם תנאי התחלה $M_0 = 0, M_1 = 1$ (הסדרה המתקבלת נקראת סדרת מספרי מרסן).

(ב) $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + n + 1$ עם תנאי התחלה $a_0 = 1, a_1 = 3$

(ג) $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2 \cdot 3^{n-2}$ עם תנאי התחלה $a_0 = 1, a_1 = 2$

(ד) $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ עם תנאי התחלה $a_0 = 3, a_1 = 6, a_2 = 14$

(ה) $f_n = 8f_{n-1} - 21f_{n-2} + 18f_{n-3}$ עם תנאי התחלה $f_0 = 0, f_1 = 1, f_2 = 2$

(ו) $f_n = 3f_{n-1} + 4f_{n-2} - 12f_{n-3}$ עם תנאי התחלה $f_0 = 0, f_1 = f_2 = 1$

פתרון:

א. הפולינום האופייני של הנוסחא הוא $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$, ולכן הפיתרון יהיה מהצורה

$$M_n = \alpha 2^n + \beta \cdot 1^n = \alpha 2^n + \beta$$

נציב את תנאי ההתחלה ונקבל את המערכת

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha + \beta = 1 \end{cases}$$

ולכן $\alpha = 1, \beta = -1$, ולכן ההצגה המפורשת המתקבלת היא

$$M_n = 2^n - 1$$

ב. הפולינום האופייני של הנוסחא ההומוגנית המתאימה הוא $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$. התוספת הלא הומוגנית היא: $1^n(n + 1)$, ומכיון ש-1 איננו שורש של הפולינום האופייני, מצפים למחובר מהצורה $1^n(\gamma n + \delta)$. נמצא את γ, δ ע"י סימון $a_n = 1^n(\gamma n + \delta)$, והצבה בנוסחא המקורית:

$$\gamma n + \delta = \gamma(n - 1) + \delta + 2(\gamma(n - 2) + \delta) + n + 1$$

$$\gamma n + \delta = n(3\gamma + 1) - 5\gamma + 3\delta + 1$$

$$n(2\gamma + 1) - 5\gamma + 2\delta + 1 = 0$$

מהשוואת מקדמים (של n והחופשי) נקבל מערכת משוואות:

$$\begin{cases} 2\gamma + 1 = 0 \\ -5\gamma + 2\delta + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma = -\frac{1}{2}, \delta = -\frac{7}{4}$$

ולכן הפתרון הכללי של הנוסחא יהיה:

$$a_n = \alpha \cdot 2^n + \beta(-1)^n - \frac{1}{2}n - \frac{7}{4}$$

על מנת למצוא את α, β נציב תנאי התחלה:

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \frac{7}{4} = 1 \\ 2\alpha - \beta - \frac{1}{2} - \frac{7}{4} = 3 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{32}{12}, \beta = \frac{1}{12}$$

ולסיכום:

$$a_n = \frac{32}{12} \cdot 2^n + \frac{1}{12}(-1)^n - \frac{1}{2}n - \frac{7}{4}$$

ג. הפולינום האופייני של הנוסחא ההומוגנית המתאימה הוא $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$. התוספת הלא הומוגנית היא: $\frac{2}{9}3^n$, ומכיון ש-3 איננו שורש של הפולינום האופייני, מצפים למחובר מהצורה $\gamma \cdot 3^n$. נמצא את γ ע"י סימון $a_n = \gamma \cdot 3^n$, והצבה בנוסחא המקורית:

$$\gamma \cdot 3^n = \gamma \cdot 3^{n-1} + 2\gamma \cdot 3^{n-2} + 2 \cdot 3^{n-2}$$

$$9\gamma = 3\gamma + 2\gamma + 2$$

$$\gamma = \frac{1}{2}$$

ולכן הפתרון הכללי של הנוסחא יהיה:

$$a_n = \alpha \cdot 2^n + \beta(-1)^n + \frac{1}{2} \cdot 3^n$$

על מנת למצוא את α, β נציב תנאי התחלה:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \frac{1}{2} = 1 \\ 2\alpha - \beta + \frac{3}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}, \beta = \frac{1}{6}$$

ולסיכום:

$$a_n = \frac{1}{3} \cdot 2^n + \frac{1}{6}(-1)^n + \frac{1}{2} \cdot 3^n$$

ד. הפולינום האופייני של הנוסחא הוא: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. נשים לב ש-1 הוא שורש של הפולינום. נבצע חילוק פולינומים:

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 5x + 6 & \\ \hline x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & x - 1 \\ \hline x^3 - x^2 & \\ \downarrow & \\ -5x^2 + 11x - 6 & \\ -5x^2 + 5x & \\ \downarrow & \\ 6x - 6 & \\ 6x - 6 & \\ \downarrow & \\ 0 & \end{array}$$

כלומר, $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6) = (x-1)(x-2)(x-3)$, לכן הפתרון הכללי יהיה מהצורה:

$$a_n = \alpha \cdot 1^n + \beta \cdot 2^n + \gamma \cdot 3^n$$

ועל מנת למצוא את הקבועים α, β, γ נציב את תנאי ההתחלה ונקבל את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 3 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = 6 \\ \alpha + 4\beta + 9\gamma = 14 \end{cases}$$

נפתור:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 9 & 14 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 8 & 11 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\alpha = \beta = \gamma = 1$$

ולכן נקבל:

$$a_n = 1 + 2^n + 3^n$$

ה. הפולינום האופייני הוא:

$$x^3 - 8x^2 + 21x - 18$$

נשים לב ש-2 הוא שורש של הפולינום. נבצע חילוק פולינומים ונקבל שניתן לפרק אותו לצורה

$$(x - 2)(x - 3)^2 = 0$$

כלומר שורשיו הם: 2 מריבוי 1, ו-3 מריבוי 2. לכן הפיתרון הכללי יהיה מהצורה:

$$f_n = \alpha 2^n + \beta 3^n + \gamma n 3^n$$

ושוב, על מנת למצוא את הקבועים α, β, γ נציב את תנאי ההתחלה ונקבל את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha + 3\beta + 3\gamma = 1 \\ 4\alpha + 9\beta + 18\gamma = 2 \end{cases}$$

פתרונות המערכת הם: $\alpha = -4, \beta = 4, \gamma = -1$, ולכן האיבר הכללי הוא:

$$f_n = -4 \cdot 2^n + 4 \cdot 3^n - n \cdot 3^n$$

ו. הפולינום האופייני של הנוסחא הוא $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ הניתן לייצוג כ- $(x - 2)(x + 2)(x - 3)$, ולכן נקבל שהשורשים הם: 2, -2, 3. לכן הפיתרון הכללי יהיה מהצורה

$$f(n) = \alpha 2^n + \beta (-2)^n + \gamma 3^n$$

נמצא את α, β, γ על פי תנאי ההתחלה. כלומר נפתור את המערכת

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha - 2\beta + 3\gamma = 1 \\ 4\alpha + 4\beta + 9\gamma = 1 \end{cases}$$

הפיתרון המתקבל הוא: $\alpha = 0, \beta = -\frac{1}{5}, \gamma = \frac{1}{5}$. ולכן פיתרון נוסחת הנסיגה הוא

$$f(n) = \frac{3^n}{5} - \frac{(-2)^n}{5}$$

2. מצאו פתרון פרטי לנוסחת הנסיגה $2a_n = 7a_{n-1} - 3a_{n-2}$ עם תנאי התחלה $a_0 = 1$, החסום ע"י קבוע (כלומר, קיים $M \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים: $|a_n| \leq M$).

פתרון:

הפולינום האופייני של הנוסחה הוא: $2x^2 - 7x + 3 = 2(x - 3)(x - \frac{1}{2})$. לכן פתרון כללי יהיה מהצורה:

$$a_n = \alpha \cdot 3^n + \beta \cdot \frac{1}{2^n}$$

כעת, נשים לב שאם $\alpha \neq 0$ אז הפתרון לא חסום, כי: נניח $\alpha, \beta > 0$ (הסבר: אם שניהם שליליים אז הערך המוחלט נותן לנו אותו דבר כמו שניהם חיוביים, אם $\alpha > 0, \beta \leq 0$ אז מה שאני עושה יותר חזק, ואם זה הפוך אז שוב הערך המוחלט מחזיר למצב העכשווי). כעת, לכל M קיים $n_0 = \lceil \log_3(\frac{M}{\alpha}) \rceil + 1$ כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים: $\alpha 3^n > M$ ולכן: $|a_n| > M$. לכן דרוש $\alpha = 0$. כעת נמצא את β לפי תנאי ההתחלה:

$$1 = \beta \cdot \frac{1}{2^0} \Rightarrow \beta = 1$$

כלומר, הפתרון הפרטי המקיים את תנאי השאלה הוא:

$$a_n = \frac{1}{2^n}$$

3. כידוע, קו ישר מחלק את המישור לשני אזורים נפרדים. נסמן ב- a_n את מספר האזורים המתקבלים מ- n ישרים העוברים במישור, כך שכל זוג ישרים נחתכים, ואין שלושה ישרים הנחתכים בנקודה אחת. מצא את הביטוי המפורש ל- a_n . הדרכה: מצא תחילה נוסחת נסיגה.

פתרון:

נתבונן ב- n הישרים כ- $n-1$ ישרים ועוד ישר אחד. הישר החדש מפצל כל אזור שהוא עובר בו לשני אזורים. השאלה היא: דרך כמה אזורים הוא עובר?

הישר ה- n חותך $n-1$ ישרים. נשים לב ש- $n-1$ ישרים אלה חוצצים בין n אזורים. לכן נקבל שהישר עובר ב- n אזורים ומפצל כל אחד מהם ל-2, כלומר מוסיף עוד n אזורים חדשים. לכן נוסחת הנסיגה המתקבלת היא

$$a_n = a_{n-1} + n$$

כאשר תנאי ההתחלה הוא $a_0 = 1$ (אם אין ישרים אז יש אזור אחד).

נקבל את הפולינום האופייני של ההומוגנית: $x-1$. החלק הלא הומוגני הוא $1^n \cdot n$, וכיון ש-1 הוא שורש של הפולינום האופייני נחפש פתרון פרטי מהצורה: $1^n \cdot (\gamma n^2 + \delta n) = 1^n \cdot (n(\gamma n + \delta))$. נמצא ע"י סימון $a_n = \gamma n^2 + \delta n$ ולכן:

$$\gamma n^2 + \delta n = \gamma(n-1)^2 + \delta(n-1) + n$$

$$\gamma n^2 + \delta n = \gamma n^2 - 2\gamma n + \gamma + \delta n - \delta + n$$

$$n(-2\gamma + 1) + \gamma - \delta = 0$$

ולכן:

$$\begin{cases} -2\gamma + 1 = 0 \\ \gamma - \delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{2}, \delta = \frac{1}{2}$$

כלומר, התוספת הלא הומוגנית היא $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$.

פתרון כללי:

$$a_n = \alpha \cdot 1^n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

ובעזרת תנאי ההתחלה $a_0 = 1$ נקבל:

$$1 = \alpha$$

ופתרון פרטי הוא:

$$a_n = 1 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

אפשר גם להסתכל על זה באופן הבא: אם נפתח את הנוסחא עוד ועוד נקבל:

$$a_n = a_{n-1} + n = a_{n-2} + (n-1) + n = a_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n = \dots$$

ולכן ניתן לנחש ש-

$$a_n = a_0 + 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$$

ואז להוכיח שזה אכן נכון באינדוקציה.

בהינתן ההוכחה (משאיר זאת לכם), אז לפי סכום סדרה חשבונית נקבל

$$a_n = a_0 + \frac{(1+n) \cdot n}{2} = 1 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$$

4. יהי $p \in \mathbb{R}$ המקיים $0 < p < 1$. מצאו פתרון כללי לנוסחת הנסיגה הבאה: $a_n = pa_{n+1} + (1-p)a_{n-1}$. שימו לב שהנוסחא לא מוצגת בצורה הרגילה שלה. הצורה הרגילה של נוסחא זו היא: $pa_n = a_{n-1} - (1-p)a_{n-2}$. שימו לב לפתרונות שונים עבור ערכים שונים של הפרמטר).

פתרון:

נקבל את הפולינום האופייני $px^2 - x + (1-p) = 0$ ולכן

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4p(1-p)}}{2p}$$

נשים לב ש- $p = \frac{1}{2} \iff (2p-1)^2 = 0 \iff 1 - 4p(1-p) = 0$, כלומר נקבל את השורש $\frac{1}{2}$ בריבוי 2, ולכל $p \neq \frac{1}{2}$ נקבל שני שורשים שונים: $x_1 = \frac{1+(2p-1)}{2p} = 1, x_2 = \frac{1-(2p-1)}{2p} = \frac{1}{p} - 1$.
 לכן, הפיתרון הוא מהצורה

$$\begin{cases} \frac{\alpha n + \beta}{2^n} & p = \frac{1}{2} \\ \alpha \left(\frac{1}{p} - 1\right)^n + \beta & p \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$