89-198 מתמטיקה בדידה – תרגיל 2

<u>שאלה 1</u>: (10 נקודות) הצרן את הטענות הבאות (בעולם המספרים השלמים $\mathbb{Z}$):

a) לכל מספר שלם קיים מספר שלם יחיד כך שסכומם שווה לאפס.

b) כל מספר זוגי הגדול מ 2 ניתן לבטא כסכום של שני מספרים ראשוניים (השערת גולדבך).
כלומר לכל מספר זוגי שגדול מ 2, קיימים שני מספרים ראשוניים כך שסכומם שווה למספר המקורי.

<u>פתרון שאלה 1</u>

a) נגדיר את הפרדיקטים $P(x,y)$ להיות $x+y=0$.
כעת הפסוק הוא $\forall x \exists! y: P(x,y)$.

b) נגדיר את הפרדיקט $P(x)$ להיות x הוא ראשוני, $Q(x)$ להיות x הוא זוגי שגדול מ 2 ו $S(x,y,z)$ להיות $x=y+z$.
כעת הפסוק הוא $\forall x\left(Q(x) \Rightarrow \exists y \exists z\big(P(y) \wedge P(z) \wedge S(x,y,z)\big)\right)$.

<u>שאלה 2</u>: (30 נקודות) הצרן את הטענות הבאות, שלול אותן וכתוב במילים מה משמעות השלילה.
(לא לשכוח להגדיר את העולם שעליו מכמתים)

a) קיים שחקן כדורסל לא נמוך שהמאמן שלו רזה.

b) לכל מלך יש בת שלא כל הנסיכים אוהבים.

c) אם לא קיים נמר לבן, אזי יש דב שאינו לבן.

<u>פתרון שאלה 2</u>

a) קיים שחקן כדורסל לא נמוך שהמאמן שלו רזה.
נסתכל על עולם בני האדם.
נגדיר את הפרדיקטים $P(x)$ להיות x הוא שחקן כדורסל, $S(x)$ להיות x הוא נמוך, $C(x)$ להיות x הוא מאמן כדורסל, $T(x,y)$ להיות y מאמן של x, $R(x)$ להיות x רזה.
הפסוק הוא $\exists x\left(P(x) \wedge \neg S(x) \wedge \exists y\big(C(y) \wedge T(x,y) \wedge R(y)\big)\right)$. נשלול את הפסוק ונקבל

$$\neg\exists x\left(P(x) \wedge \neg S(x) \wedge \exists y\big(C(y) \wedge T(x,y) \wedge R(y)\big)\right) \equiv$$ שלילת כמתים

$$\forall x \neg\left(P(x) \wedge \neg S(x) \wedge \exists y\big(C(y) \wedge T(x,y) \wedge R(y)\big)\right) \equiv$$ דה מורגן

$$\forall x\left(\neg\big(P(x) \wedge \neg S(x)\big) \vee \neg\exists y\big(C(y) \wedge T(x,y) \wedge R(y)\big)\right) \equiv$$ שלילת כמתים

$$\forall x\left(\neg\big(P(x) \wedge \neg S(x)\big) \vee \forall y \neg\big(C(y) \wedge T(x,y) \wedge R(y)\big)\right) \equiv$$ דה מורגן

$$\forall x\left(\neg\big(P(x) \wedge \neg S(x)\big) \vee \forall y\left(\neg\big(C(y) \wedge T(x,y)\big) \vee \neg R(y)\right)\right) \equiv$$ גרירה

$$\forall x\left(\big(P(x) \wedge \neg S(x)\big) \Rightarrow \forall y\left(\neg\big(C(y) \wedge T(x,y)\big) \vee \neg R(y)\right)\right) \equiv$$ גרירה

$$\forall x\left(\big(P(x) \wedge \neg S(x)\big) \Rightarrow \forall y\left(\big(C(y) \wedge T(x,y)\big) \Rightarrow \neg R(y)\right)\right)$$

כלומר, לכל שחקן כדורסל לא נמוך, כל מאמן שלו אינו רזה.

b) לכל מלך יש בת שלא כל הנסיכים אוהבים.

נסתכל על עולם בני האדם.

נגדיר את הפרדיקטים $K(x)$ להיות x הוא מלך, $P(x)$ להיות x הוא נסיך, $D(x,y)$ להיות y היא בת של x ו $L(x,y)$ להיות x אוהב את y.

הפסוק הוא $\forall x\left(K(x)\Rightarrow \exists y\left(D(x,y)\wedge \neg\forall z\big(P(z)\Rightarrow L(z,y)\big)\right)\right)$.

נשלול את הפסוק ונקבל

$$\neg\forall x\left(K(x)\Rightarrow \exists y\left(D(x,y)\wedge \neg\forall z\big(P(z)\Rightarrow L(z,y)\big)\right)\right)\equiv \quad \text{שלילת כמתים}$$

$$\exists x\neg\left(K(x)\Rightarrow \exists y\left(D(x,y)\wedge \neg\, \forall z\big(P(z)\Rightarrow L(z,y)\big)\right)\right)\equiv \quad \text{גרירה}$$

$$\exists x\neg\left(\neg K(x)\vee \exists y\left(D(x,y)\wedge \neg\, \forall z\big(P(z)\Rightarrow L(z,y)\big)\right)\right)\equiv \quad \text{דה מורגן, שלילה כפולה}$$

$$\exists x\left(K(x)\wedge \neg\exists y\left(D(x,y)\wedge \neg\forall z\big(P(z)\Rightarrow L(z,y)\big)\right)\right)\equiv \quad \text{שלילת כמתים}$$

$$\exists x\left(K(x)\wedge \forall y\neg\left(D(x,y)\wedge \neg\forall z\big(P(z)\Rightarrow L(z,y)\big)\right)\right)\equiv \quad \text{דה מורגן, שלילה כפולה}$$

$$\exists x\left(K(x)\wedge \forall y\left(\neg D(x,y)\vee \forall z\big(P(z)\Rightarrow L(z,y)\big)\right)\right)\equiv \quad \text{גרירה}$$

$$\exists x\left(K(x)\wedge \forall y\left(D(x,y)\Rightarrow \forall z\big(P(z)\Rightarrow L(z,y)\big)\right)\right)$$

כלומר קיים מלך שכל הנסיכים אוהבים את כל בנותיו.

c) אם לא קיים נמר לבן אזי יש דב שאינו לבן.

נסתכל על עולם בעלי החיים.

נגדיר את הפרדיקטים $T(x)$ להיות x הוא נמר, $B(x)$ להיות x הוא דב ו $W(x)$ להיות x הוא לבן.

הפסוק הוא $\left(\neg\exists x\big(T(x)\wedge W(x)\big)\right)\Rightarrow\left(\exists y\big(B(y)\wedge\neg W(y)\big)\right)$.

נשלול את הפסוק ונקבל:

$$\neg\left(\left(\neg\exists x\big(T(x)\wedge W(x)\big)\right)\Rightarrow\left(\exists y\big(B(y)\wedge\neg W(y)\big)\right)\right)\equiv \quad \text{גרירה}$$

$$\neg\left(\neg\left(\neg\exists x\big(T(x)\wedge W(x)\big)\right)\vee\left(\exists y\big(B(y)\wedge\neg W(y)\big)\right)\right)\equiv \quad \text{שלילה כפולה}$$

$$\neg\left(\left(\exists x\big(T(x)\wedge W(x)\big)\right)\vee\left(\exists y\big(B(y)\wedge\neg W(y)\big)\right)\right)\equiv \quad \text{דה מורגן}$$

$$\neg\left(\exists x\big(T(x)\wedge W(x)\big)\right)\wedge\neg\left(\exists y\big(B(y)\wedge\neg W(y)\big)\right)\equiv \quad \text{שלילת כמתים}$$

$$\left(\forall x\neg\big(T(x)\wedge W(x)\big)\right)\wedge\left(\forall y\neg\big(B(y)\wedge\neg W(y)\big)\right)\equiv \quad \text{דה מורגן, שלילה כפולה}$$

$$\left(\forall x\big(\neg T(x)\vee\neg W(x)\big)\right)\wedge\left(\forall y\big(\neg B(y)\vee W(y)\big)\right)\equiv \quad \text{גרירה}$$

$$\left(\forall x\big(T(x)\Rightarrow\neg W(x)\big)\right)\wedge\left(\forall y\big(B(y)\Rightarrow W(y)\big)\right)$$

כלומר כל הנמרים לא לבנים וכל הדובים לבנים.

שאלה 3: (20 נקודות) הצרן את ההיסקים הבאים והוכח את נכונותם:
יש להוכיח בצורה פורמלית, תוך כדי ציון כללי ההיסק בכל שלב.

a) אם תרגיל הוא קשה אז הוא מאתגר או מתסכל. התרגיל הנוכחי קשה ולא מתסכל. לכן, יש תרגיל מאתגר.

b) כל ספר מתמטיקה הוא קומי או טרגי, אך לא שניהם.
אם ספר הוא ארוך מאוד אז הוא טרגי או מכיל איורים.
ספר המתמטיקה "מתמטיקה בדידה" הוא גם קומי וגם ארוך מאוד.
לכן קיים ספר שמכיל איורים.

פתרון שאלה 3

a) הוכחה:
נסתכל על עולם התרגילים.
נסמן את התרגיל הנוכחי ב a.
נגדיר את הפרדיקטים $P(x)$ להיות x הוא קשה, $Q(x)$ להיות x הוא מתסכל ו $R(x)$ להיות x הוא מאתגר.
ההנחות הן: $\forall x\left(P(x) \Rightarrow \left(R(x) \vee Q(x)\right)\right), P(a) \wedge \neg Q(a)$. המסקנה היא $\exists x: R(x)$.
מכיון ש $\forall x\left(P(x) \Rightarrow \left(R(x) \vee Q(x)\right)\right)$, נובע מ US שבפרט עבור התרגיל הנוכחי מתקיים $P(a) \Rightarrow \left(R(a) \vee Q(a)\right)$.
לפי כלל הפישוט מ $P(a) \wedge \neg Q(a)$ נובע $P(a)$ וכמו כן $\neg Q(a)$.
לפי מודוס פוננס מ $P(a) \Rightarrow \left(R(a) \vee Q(a)\right), P(a)$ נובע $R(a) \vee Q(a)$.
לפי סילוגיזם דיסיונקטיבי מ $R(a) \vee Q(a), \neg Q(a)$ נובע $R(a)$.
קיבלנו שעבור התרגיל הנוכחי מתקיים $R(a)$, לכן מ EG נובע $\exists x: R(x)$.

b) הוכחה:
נגדיר את הפרדיקטים הבאים בעולם הספרים

$M(x)$ משמעותו x הוא ספר מתמטיקה
$C(x)$ משמעותו x הוא ספר קומי
$T(x)$ משמעותו x הוא ספר טרגי
$L(x)$ משמעותו x הוא ספר ארוך מאוד
$I(x)$ משמעותו x הוא ספר שמכיל איורים

בנוסף נסמן ב a את הספר מתמטיקה בדידה.

ההנחות הן: $\forall x\left(M(x) \Rightarrow \left(C(x) \oplus T(x)\right)\right), \forall x\left(L(x) \Rightarrow \left(T(x) \vee I(x)\right)\right), M(a) \wedge C(a) \wedge L(a)$.
המסקנה היא $\exists x\left(I(x)\right)$.
הוכחה: לפי חוק הפישוט $M(a) \wedge C(a) \wedge L(a)$ גורר לוגית את $M(a)$, $C(a)$ ואת $L(a)$.
לפי US מ $\forall x\left(M(x) \Rightarrow \left(C(x) \oplus T(x)\right)\right)$ נובע $M(a) \Rightarrow \left(C(a) \oplus T(a)\right)$.
לפי מודוס פוננס, מ $M(a)$ ו $M(a) \Rightarrow \left(C(a) \oplus T(a)\right)$ נובע $C(a) \oplus T(a)$.
לפי הגדרת XOR, $C(a) \oplus T(a) \equiv \left(C(a) \vee T(a)\right) \wedge \neg\left(C(a) \wedge T(a)\right) \equiv \left(C(a) \vee T(a)\right) \wedge \left(\neg C(a) \vee \neg T(a)\right)$.
לפי חוק הפישוט $\left(C(a) \vee T(a)\right) \wedge \left(\neg C(a) \vee \neg T(a)\right)$ נובע $\neg C(a) \vee \neg T(a)$.
לפי סילוגיזם דיסיונקטיבי, מ $\neg C(a) \vee \neg T(a)$ ו $C(a)$ נובע $\neg T(a)$.
לפי US מ $\forall x\left(L(x) \Rightarrow \left(T(x) \vee I(x)\right)\right)$ נובע $L(a) \Rightarrow \left(T(a) \vee I(a)\right)$.
לפי מודוס פוננס, מ $L(a)$ ו $L(a) \Rightarrow \left(T(a) \vee I(a)\right)$ נובע $T(a) \vee I(a)$.
לפי סילוגיזם דיסיונקטיבי, מ $T(a) \vee I(a)$ ו $\neg T(a)$ נובע $I(a)$.
לפי EG, מ $I(a)$ נובע $\exists x\left(I(x)\right)$.

<u>שאלה 4</u>: (20 נקודות) מצא צורות CNF ו DNF לפסוקים הבאים:

a) $((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow r) \Rightarrow \neg q$ (בעזרת זהויות לוגיות).

b) $(p \Rightarrow r) \Leftrightarrow ((\neg q \vee r) \oplus (p \Rightarrow \neg r))$ (בעזרת טבלת אמת).

<u>פתרון שאלה 4</u>

a) $((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow r) \Rightarrow \neg q$ (בעזרת זהויות לוגיות).

$$((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow r) \Rightarrow \neg q \overset{\text{גרירה}}{\equiv} ((\neg p \vee \neg q) \Rightarrow r) \Rightarrow \neg q \overset{\text{גרירה}}{\equiv} (\neg(\neg p \vee \neg q) \vee r) \Rightarrow \neg q \overset{\text{גרירה}}{\equiv}$$

$$\neg(\neg(\neg p \vee \neg q) \vee r) \vee \neg q \overset{\text{דה מורגן}}{\equiv} ((\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r) \vee \neg q \overset{\text{דיסטריביוטיביות}}{\equiv} ((\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge \neg r)) \vee \neg q \overset{\text{אסוציאטיביות}}{\equiv}$$

$$(\neg p \wedge \neg r) \vee ((\neg q \wedge \neg r) \vee \neg q) \overset{\text{קומוטטיביות}}{\equiv} (\neg p \wedge \neg r) \vee ((\neg r \wedge \neg q) \vee \neg q) \overset{\text{ספיגה}}{\equiv} (\neg p \wedge \neg r) \vee \neg q$$

זו צורת DNF של הפסוק.

$$(\neg p \wedge \neg r) \vee \neg q \overset{\text{דיסטריביוטיביות}}{\equiv} (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee \neg q)$$

זו צורת CNF של הפסוק.

b) $(p \Rightarrow r) \Leftrightarrow ((\neg q \vee r) \oplus (p \Rightarrow \neg r))$ (בעזרת טבלת אמת).

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$	$\neg\boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{p} \Rightarrow \neg\boldsymbol{r}$	$(\neg\boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r}) \oplus (\boldsymbol{p} \Rightarrow \neg\boldsymbol{r})$	$\boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{r}$	$(\boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{r}) \Leftrightarrow ((\neg\boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r}) \oplus (\boldsymbol{p} \Rightarrow \neg\boldsymbol{r}))$
T	T	T	T	F	T	T	T
T	T	F	F	T	T	F	F
T	F	T	T	F	T	T	T
T	F	F	T	T	F	F	T
F	T	T	T	T	F	T	F
F	T	F	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	F	T	F
F	F	F	T	T	F	T	F

נסתכל על שורות 1,3,4,6 (השורות שבהן יש ערך T), ונבנה פסוקית גם לכל שורה.

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$$

זו צורת ה DNF המלאה של הפסוק.

על מנת למצוא CNF, תחילה נמצא DNF של שלילת הפסוק, ולאחר מכן נשלול את התוצאה ונשתמש בכללי דה מורגן.

נחשב DNF עבור שלילת הפסוק ונקבל

$$(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

נשלול את הביטוי ובעזרת דה מורגן נקבל

$$\neg((p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)) \equiv$$

$$\neg(p \wedge q \wedge \neg r) \wedge \neg(\neg p \wedge q \wedge r) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \equiv$$

$$(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee r)$$

זו צורת CNF של הפסוק.

<u>שאלה 5</u>: (20 נקודות)

a) בטא את הפסוק $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow \neg(q \vee r)$ בעזרת הקבוצה $\{\neg, \wedge\}$.
b) בטא את הפסוק $\neg\big(p \downarrow (\neg r)\big) \Rightarrow \neg q$ בעזרת $\{\uparrow\}$.

<u>פתרון שאלה 5</u>

a) בטא את הפסוק $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow \neg(q \vee r)$ בעזרת הקבוצה $\{\neg, \wedge\}$.

$$(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow \neg(q \vee r) \overset{\text{גרירה כפולה}}{\equiv} \big((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)\big) \Rightarrow \neg(q \vee r) \overset{\text{גרירה}}{\equiv} \big((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)\big) \Rightarrow \neg(q \vee r) \overset{\text{דה מורגן}}{\equiv}$$

$$\big(\neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(q \wedge \neg p)\big) \Rightarrow (\neg q \wedge \neg r) \overset{\text{גרירה}}{\equiv} \neg\big(\neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(q \wedge \neg p)\big) \vee (\neg q \wedge \neg r) \overset{\text{דה מורגן}}{\equiv}$$

$$\big(\neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(q \wedge \neg p)\big) \wedge \neg(\neg q \wedge \neg r)$$

c) בטא את הפסוק $\neg(p \downarrow \neg r) \Rightarrow \neg q$ בעזרת $\{\uparrow\}$.

$$\neg(p \downarrow \neg r) \Rightarrow \neg q \overset{\text{הגדרת NOR}}{\equiv} \neg\big(\neg(p \vee \neg r)\big) \Rightarrow \neg q \overset{\text{שלילה כפולה}}{\equiv} (p \vee \neg r) \Rightarrow \neg q \overset{\text{גרירה}}{\equiv} \neg(p \vee \neg r) \vee \neg q \overset{\text{דה מורגן}}{\equiv} (\neg p \wedge r) \vee \neg q \overset{\text{שלילה כפולה}}{\equiv}$$

$$\neg\neg(\neg p \wedge r) \vee \neg q \overset{\text{הגדרת NAND}}{\equiv} \neg(\neg p \uparrow r) \vee \neg q \overset{\text{דה מורגן}}{\equiv} \neg\big((\neg p \uparrow r) \wedge q\big) \overset{\text{הגדרת NAND}}{\equiv} (\neg p \uparrow r) \uparrow q \overset{\neg p \equiv (p \uparrow p)}{\equiv} \big((p \uparrow p) \uparrow r\big) \uparrow q$$