תרגול 9

המשך אינטגרל לא אמיתי.

מבחן דריכלה:

יהיו f,g פונקציה רציפה בקטע $[a,\infty)$

כך שמתקיים:

1. f פונק' מונוטונית יורדת ל-0.
2. f' רציפה בקטע
3. הפונקציה $G(x)=\int_a^x g(t)\,dt$ היא פונקציה חסומה $[a,\infty]$

אז: $\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx$ מתכנס.

דוגמה: הוכיחו כי $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}$ מתכנס

לכל $\alpha>0$

פתרון: נסמן $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$, $g(x)=\sin x$.

בתחום $[1,\infty)$ f רציפה, מונוטונית יורדת ומתכנסת ל-0, f' רציפה גם היא.

בנוסף: $G(x)=\int_1^x \sin t\,dt=-\cos t\Big]_1^x$

$$-2 \le G(x) = -\cos x + \cos 1 \le 2$$

ולכן $G(x)$ חסומה ותנאי משפט דיריכלה מתקיימים

ולכן האינטגרל אכן מתכנס לכל α.

התכנסות בהחלט

הגדרה: בהינתן אינטגרל לא אמיתי $\int_a^b f(x)dx$ עם ע'

בע"ית $c\in[a,b]$, נאמר כי האינטגרל מתכנס

בהחלט אם מתקיים כי האינטגרל

$$\int_a^b |f(x)|dx$$

מתכנס.

נאמר כי הוא מתכנס בתנאי אם האינטגרל

$\int f(x)dx$ מתכנס אך האינטגרל $\int |f(x)|dx$

מתבדר.

משפט (קושי): אינטגרל מתכנס בהחלט הוא אינטגרל

מתכנס.

דוגמה: האינטגרל $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}$

ראשית, האינטגרל מקיים את תנאי מבחן דיריכלה ולכן מתכנס.

האם הוא מתכנס בהחלט?

<u>תשובה</u>:

$$\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^2}\,dx$$

לפי מבחן ההשוואה $0 \le \frac{|\sin x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$

וכיוון ש- $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ מתכנס גם $\int \frac{|\sin x|}{x^2}\,dx$ מתכנס

ולכן האינטגרל מתכנס בהחלט.

<u>תרגיל</u>: בדקו את ההתכנסות של $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$.

<u>פתרון</u>: האינטגרל מתכנס לפי מבחן דיריכלה.

כעת, $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx$

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \ge \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1-\cos 2x}{2x}$$

$$|\sin x| \le 1 \qquad \cos 2x = \dots$$

$$\Downarrow$$

$$\sin^2 x \le |\sin x|$$

$$\boxed{\int_1^\infty \frac{1-\cos 2x}{2x}} = \int_1^\infty \frac{1}{2x}dx - \int_1^\infty \frac{\cos 2x}{2x}dx$$

מתבדר   מתכנס. לפי דיריכלה

כל ר קיבלנו סכום של אינטגרל מתכנס + אינטגרל מתבדר (הבאלת קושי) ולכן מתבדר.

קיבלנו שהאינטגרל $\int \frac{\sin^2 x}{x}dx$ מתבדר ולכן גם האינטגרל $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx$ מתבדר לפי מבחן ההשוואה.

סה"כ: $\int \frac{\sin x}{x}$ מתכנס ולא מתכנס בהחלט ולכן מתכנס בתנאי.

הערה: ניתן לעבור מאינטגרל לא אמיתי מסוג שני, לאינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון

ע"י ההצבה $y=\frac{1}{x-a}$ כאשר a היא הנק' הבע"ית.

לדוגמה: קבעו התכנסות של האינטגרל $\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{x}dx$

(נק' בע"ית ב-0). כיוון ש $\cos\frac{1}{x}$ לפעמים חיובית ולפעמים שלילית, לא ניתן להשתמש במבחני

השאלה.

נעביר דהצבה $y=\frac{1}{x}$ ונקבל

$dy=-\frac{1}{x^2}dx \leftarrow$

$x\to 0^+ \Rightarrow y\to\infty$

$x=1 \Rightarrow y=1$

$$=-\int_{\infty}^{1}\frac{1}{y}\cos y\,dy=\int_{1}^{\infty}\frac{\cos y}{y}\,dy$$

והאינטגרל הזה מתכנס בתנאי לפי דריכלה.

סדרות וטורים של פונקציות

<u>הגדרה</u>: סדרה $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ של פונקציות היא התאמה שבה לכל n טבעי מתאימה פונקציה $f_n(x)$.

לכל x_0 השייך לתחום ההגדרה, הסדרה $(f_n(x_0))_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת מספרים. אם סדרה זו מתכנסת נאמר כי $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ <u>מתכנסת נקודתית</u> בנק' $x=x_0$.

אם $(f_n(x))$ מתכנסת נקודתית לכל $x\in I$ אזי נאמר כי $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית בקטע I.

<u>הגדרה</u>: יהיו סדרת פונקציות $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ פונקציית הגבול (אם קיימת) הינה $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$

דוגמה: קבעו התכנסות של $f(x)=x^n$ בכל $\mathbb{R}$.

נחלק למקרים: אם $|x|>1$ מתבדר $\lim_{n\to\infty} x^n$

ולכן כאשר $x>1$ אין התכנסות נק'.

כאשר $x=1$: $\lim_{n\to\infty} 1^n = 1$

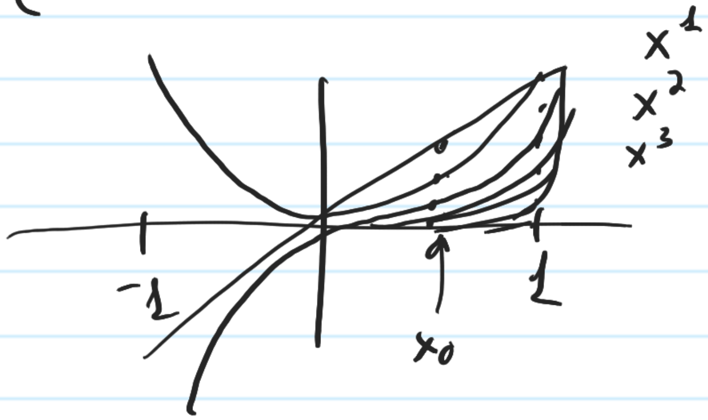
$|x|<1$: $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$

כאשר $x=-1$: מתבדר - $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$

על כן **פונק' הגבול מוגדרת** לכל $x\in(-1,1]$

ומתקיים

$$f(x)=\begin{cases}1 & x=1\\ 0 & x\in(-1,1)\end{cases}$$



דוגמה נוספת: מצאו את פונקציית הגבול של $f_n(x)=\ln\left(x+\frac{x^2}{n}\right)$ בקטע $(0,\infty)$.

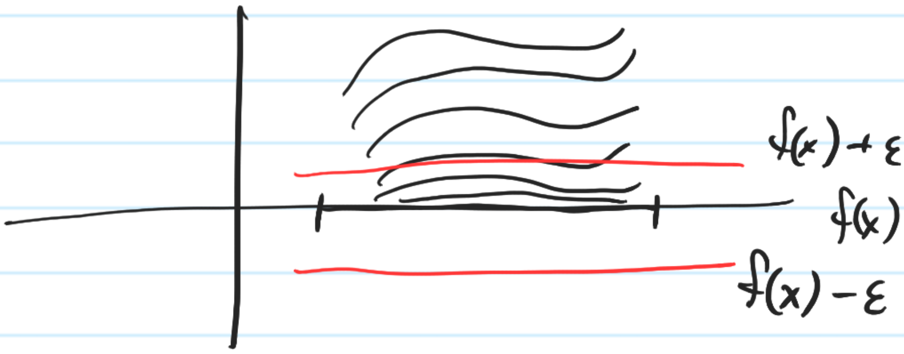
פתרון: $f(x)=\lim_{n\to\infty}\ln\left(x+\frac{x^2}{n}\right)$

$$= \ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(x+\frac{x^2}{n}\right)\right) = \boxed{\ln(x)}$$

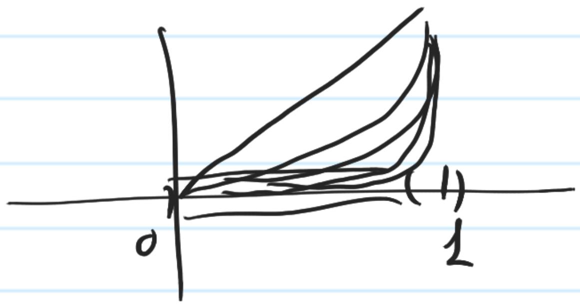
<u>הגדרה</u>: (התכנסות במידה שווה)

תהי $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות המוגדרת בקטע I. נאמר כי $(f_n(x))$ מתכנסת <u>במידה</u> שווה ל- $f(x)$, אם

$$\underline{\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}:\ \forall n>n_0},\ \forall x\in I\ \ \underbrace{|f_n(x)-f(x)|}<\varepsilon$$



למשל x^n לא מתכנסת במ"ש ל-0 בקטע $[0,1)$



<u>תרגיל</u>: הוכיחו ש $f_n(x) = \left(1+\frac{1}{n}\right)x$ מתכנסת במ"ש

בקטע לו,

<u>פתרון</u>: נמצא את הגבול

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)x^2 = x^2$$

נבדוק התכנסות במ"ש: $\forall x \in [0,1]$:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)x^2 - x^2\right|$$

$$= \frac{x^2}{n} \underset{x\in[0,1]}{\leq} \frac{1}{n} \underset{?}{<} \varepsilon$$

לכן עבור $\varepsilon > 0$, נבחר $n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$

ואז לכל $n > n_0$ מתקיים $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

מכיוון n_0 שלא תלוי ב-x לפי ההגדרה

ה"ס אכן במידה שווה.

<u>משפט:</u> אם $(f_n(x))$ סדרה של פונק' רציפות המתכנסת במ"ש ל-$f(x)$ בקטע I אזי $f(x)$

גם היא רציפה בקטע I.

<u>מסקנה:</u> $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ אינה מתכנסת במ"ש בקטע $[0,1]$.

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0 & x \in [0,1) \end{cases}$$

<u>הערה:</u> יתכן שפונק' הגבול תהיה רציפה אך עדיין ההתכנסות לא תהיה במ"ש.

משפט: (התכנסות סדרה החסמים / מבחן ה $\sup - \lim$)

סדרת הפונקציות $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש

ל- $f(x)$ בקטע I, __אם ורק אם__

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sup_{x\in I}\left\{|f_n(x)-f(x)|\right\}\right]=0$$