<u>פתרון תרגיל בית 3</u>

<u>שאלה 1</u>

חשב את האינטגרליים היעזר בחלוקת פולינומים:

א. $\int \frac{x^3}{2x+1}dx$.

ב. $\int \frac{3x^3-7x^2+11x-6}{x-1}dx$.

ג. $\int \frac{(x+2)^3}{x^3+x}dx$

<u>פתרון שאלה 1</u>

<u>סעיף א</u>

$\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}$

$x^3 \quad | \quad 2x+1$

$\underline{x^3+\frac{1}{2}x^2}$

$-\frac{1}{2}x^2$

$\underline{-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x}$

$\frac{1}{4}x$

$\underline{\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}}$

$-\frac{1}{8}$

מחלוקת פולינומים נקבל ש $\frac{x^3}{2x+1}=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}-\frac{1}{16x+8}$.

$$\int \frac{x^3}{2x+1}dx=\int\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}-\frac{1}{16x+8}\right)dx=\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{8}+\frac{x}{8}-\frac{1}{16}\ln|16x+8|+C$$

<u>סעיף ב</u>

$3x^2-4x+7$

$3x^3-7x^2+11x-6 \,|\, x-1$

$\underline{3x^3-3x^2}$

$-4x^2+11x-6$

$\underline{-4x^2+4x}$

$7x-6$

$\underline{7x-7}$

1

מחלוקת פולינומים נקבל ש $\frac{3x^3-7x^2+11x-6}{x-1}=3x^2-4x+7+\frac{1}{x-1}$

$$\int \frac{3x^3-7x^2+11x-6}{x-1}dx=\int\left(3x^2-4x+7+\frac{1}{x-1}\right)dx=x^3-2x^2+7x+\ln|x-1|+C$$

סעיף ג

$$\int \frac{(x+2)^3}{x^3+x}dx = \int \frac{x^3+6x^2+12x+8}{x^3+x} = \int (\frac{x^3+x}{x^3+x} + \frac{6x^2+11x+8}{x^3+x})dx =$$
$$= \int \left(1 + \frac{2(3x^2+1)}{x^3+x} + \frac{11x+6}{x^3+x}\right)dx$$

נחשב את האינטגרל של כל אחד מהמחוברים בנפרד

$$\int 1dx = x, \int \frac{2(3x^2+1)}{x^3+x}dx = 2\ln(x^3+x)$$

נשאר לחשב $\int \frac{11x+6}{x(x^2+1)}dx = \int \left(\frac{11x}{x(x^2+1)} + \frac{6}{x(x^2+1)}\right)dx$

נחשב את האינטגרל של כל אחד מהמחוברים בנפרד

$$\int \frac{11}{x^2+1}dx = 11\arctan x$$

$$\int \frac{6}{x(x^2+1)}dx = 6\int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx = 6\left(\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right)$$

סה"כ נקבל שהפתרון הוא

$$x + 2\ln|x^3+x| + 11\arctan x + 6\ln|x| - 3\ln(x^2+1) + C$$

שאלה 2

חשב את האינטגרליים הבאים בעזרת הכפלה בצמוד:

א. $\int \frac{2x}{\sqrt{x+1}-1}dx$.

ב. $\int \frac{x}{1+\sqrt{2x+1}}dx$.

ג. $\int \frac{1}{1-\sin x}dx$.

פתרון שאלה 2

סעיף א

$$\frac{2x}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{2x}{\sqrt{x+1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{2x(\sqrt{x+1}+1)}{x+1-1} = 2\sqrt{x+1}+2$$

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x+1}-1}dx = \int (2\sqrt{x+1}+2)dx = \int \left(2(x+1)^{\frac{1}{2}}+2\right)dx = \frac{4(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + 2x + C.$$

סעיף ב

$$\frac{x}{1+\sqrt{2x+1}} = \frac{x}{1+\sqrt{2x+1}} \cdot \frac{1-\sqrt{2x+1}}{1-\sqrt{2x+1}} = \frac{x(1-\sqrt{2x+1})}{1-2x-1} = \frac{\sqrt{2x+1}-1}{2}$$

$$\int \frac{x}{1+\sqrt{2x+1}}dx = \int \frac{\sqrt{2x+1}-1}{2}dx = \int \left(\frac{1}{2}(2x+1)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\right)dx = \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x}{2} + C.$$

סעיף ג

$$\frac{1}{1-\sin x} = \frac{1}{1-\sin x} \cdot \frac{1+\sin x}{1+\sin x} = \frac{1+\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

$$\int \frac{1}{1-\sin x}dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx = \tan x - \frac{1}{\cos x}+C$$

<u>שאלה 3</u>

חשב את האינטגרליים הבאים בעזרת השיטה לחישוב אינטגרל מהצורה $\frac{ax+b}{x^2+px+q}$:

א. $\int \frac{x^2+3x}{x^2-9x+8}dx$.

ב. $\int \frac{x^3}{x^2+8x+17}dx$.

ג. $\int \frac{x^2+1}{x^2+4x+4}dx$.

<u>פתרון שאלה 3</u>

<u>סעיף א</u>

מכיוון שהחזקה של המונה שווה לחזקה של המכנה נבצע תחילה חלוקת פולינומים

$$\begin{array}{l} \quad 1 \\ x^2+3x \,\big|\, x^2-9x+8 \\ \underline{x^2-9x+8} \\ 12x-8 \end{array}$$

$$\int \frac{x^2+3x}{x^2-9x+8}dx = \int\left(1+\frac{12x-8}{x^2-9x+8}\right)dx = \int 1dx + 6\int \frac{2x-9}{x^2-9x+8}dx + 46\int \frac{1}{x^2-9x+8}dx$$

נחשב את האינטגרל של כל אחד מהמחוברים:

$$\int 1dx = x$$

$$\int \frac{2x-9}{x^2-9x+8}dx = \ln\left|x^2-9x+8\right| = \ln\left(|x-1||x-8|\right) = \ln|x-1| + \ln|x-8|$$

$$\int \frac{1}{x^2-9x+8}dx = \int \frac{1}{(x-1)(x-8)}dx = \frac{1}{7}\int \frac{1}{x-8}dx - \frac{1}{7}\int \frac{1}{x-1}dx = \frac{1}{7}\ln|x-8| - \frac{1}{7}\ln|x-1|$$

סה"כ פתרון האינטגרל: $x+\frac{8}{7}\ln|x-8|+\frac{6}{7}\ln|x-1|+C$.

<u>סעיף ב</u>

מכיוון שהחזקה הגבוהה של המונה גדולה מהחזקה הגבוהה של המכנה נבצע תחילה חלוקת פולינומים:

$$\begin{array}{l} \quad x^2-8x \\ x^3 \,\big|\, x^2+8x+17 \\ \underline{x^3+8x^2+17x} \\ -8x^2-17x \\ \underline{-8x^2-64x-136} \\ 47x+136 \end{array}$$

$$\int \frac{x^3}{x^2+8x+17}dx = \int\left(x^2-8x+\frac{47x+136}{x^2+8x+17}\right)dx = \int\left(x^2-8x\right)dx + \frac{47}{2}\int \frac{2x+8}{x^2+8x+17}dx - \int \frac{52}{x^2+8x+17}dx$$

נחשב את האינטגרל של כל אחד מהמחוברים

$$\int\left(x^2-8x\right)dx = \frac{x^3}{3}-4x^2 \quad , \quad \int \frac{2x+8}{x^2+8x+17}dx = \ln\left(x^2+8x+17\right)$$

$$\int\frac{1}{x^2+8x+17}dx=\int\frac{1}{(x+4)^2+1}dx=\arctan(x+4)$$

סה"כ נקבל $\frac{x^3}{3}-4x^2+\frac{47}{2}\ln\left(x^2+8x+17\right)-52\arctan(x+4)+C$.

סעיף ג

מכיוון שהחזקה הגבוהה של המונה שווה לחזקה הגבוהה של המכנה נבצע חלוקת פולינומים.

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ x^2+1 & x^2+4x+4 \\ & \underline{x^2+4x+4} \\ & -4x-3 \end{array}$$

$$\int\left(\frac{x^2+1}{x^2+4x+4}\right)dx=\int\left(1-\frac{4x+3}{x^2+4x+4}\right)dx=\int 1dx-2\int\frac{2x+4}{x^2+4x+4}dx+5\int\frac{1}{(x+2)^2}dx$$
$$=x-2\ln\left(x^2+4x+4\right)-\frac{5}{x+2}$$

שאלה 4

חשב את האינטגרליים הבאים בעזרת השיטה לחישוב אינטגרל מהצרה $\frac{ax+b}{\sqrt{x^2+px+q}}$:

א. $\int\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+6x+13}}dx$.

ב. $\int\frac{6}{\sqrt{7-4x^2+4x}}dx$.

ג. $\int\frac{5}{\sqrt{x^2+4x+4}}dx$.

ד. $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+5x-6}}dx$.

פתרון שאלה 4

סעיף א

$$\int\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+6x+13}}dx=\int\frac{2x+6}{\sqrt{x^2+6x+13}}dx-5\int\frac{1}{\sqrt{x^2+6x+13}}dx.$$

נחשב את האינטגרל של כל אחד מהמחוברים $\int\frac{2x+6}{\sqrt{x^2+6x+13}}dx=2\sqrt{x^2+6x+13}$.

נשתמש באינטגרל המידי $\int\frac{1}{\sqrt{(x+b)^2+a^2}}dx=\ln\left((x+b)+\sqrt{(x+b)^2+a^2}\right)$.

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+6x+13}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{(x+3)^2+4}}dx=\ln\left((x+3)+\ln\sqrt{(x+3)^2+4}\right).$$

סה"כ התשובה: $-5\ln\left((x+3)+\ln\sqrt{(x+3)^2+4}\right)+2\sqrt{x^2+6x+13}+C$.

סעיף ב

$$\int\frac{6}{\sqrt{7-4x^2+4x}}dx=6\int\frac{1}{\sqrt{8-(2x-1)^2}}dx.$$

נשתמש באינטגרל המידי $\int \frac{1}{\sqrt{m^2-(x+n)^2}}dx=\arcsin\frac{x+n}{m}$

$$\int \frac{6}{\sqrt{7-4x^2+4x}}dx=6\int \frac{1}{\sqrt{8-(2x-1)^2}}dx=\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{8}}\right)+C.$$

סעיף ג

$$\int \frac{5}{\sqrt{x^2+4x+4}}dx=5\int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^2}}dx=5\int \frac{1}{|x+2|}dx=5\ln|x+2|+C.$$

סעיף ד

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+5x-6}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{(x+2.5)^2-0.25}}dx=\ln\left((x+2.5)+\ln\sqrt{(x+2.5)^2-0.25}\right)+C$$

שאלה 5

חשב את האינטגרליים היעזר בזהויות טריגונומטריות:

ד. $\int(\cos^4 x-\sin^4 x)dx$.

ה. $\int \sin^2 3xdx$.

ו. $\int 7\cot^2\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)dx$

פתרון שאלה 5

סעיף א

$$\int(\cos^4 x-\sin^4 x)dx=\int(\cos^2 x+\sin^2 x)(\cos^2 x-\sin^2 x)dx=$$

$$\int(\cos^2 x-\sin^2 x)dx=\int\cos 2xdx=\frac{1}{2}\sin 2x+C$$

סעיף ב

נשתמש בזהות $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

$$\int \sin^2 3xdx=\int\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos 6x}{2}\right)dx=\frac{x}{2}-\frac{\sin 6x}{12}+C.$$

סעיף ג

נשתמש בזהות $1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$.

$$\int 7\cot^2\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)dx=\int\frac{7}{\sin^2\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)}dx-\int 7dx=-\frac{7}{4}\cot\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)-7x+C.$$

שאלה 6

חשב את האינטגרליים הבאים בעזרת הצבות טריגונומטריות

$x=a\sin t, x=a\cos t, x=\frac{a}{\sin t}, x=a\tan t$:

ד. $\int x^4\sqrt{1-x^2}dx$.

ה. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-4x^2}}dx$.

ו. $\int \sqrt{x^2+9}dx$.

<u>פתרון שאלה 6</u>

<u>סעיף א</u>

נציב $x=\sin t$ ואז $dx=\cos t dt$.

$\int x^4\sqrt{1-x^2}dx=\int \sin^4 t\cos^2 t dt$.

נשתמש בזהויות $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

$\cos^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2}, \sin^4 t=\frac{(1-\cos 2t)^2}{4}$.

$$\sin^4 t\cos^2 t=\frac{(1-\cos 2t)^2}{4}\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}=\frac{(1-\cos 2t)(1-\cos^2 2t)}{8}=\frac{(1-\cos 2t)\sin^2 2t}{8}$$

$\int \sin^4 t\cos^2 t dt=\frac{1}{8}\int \sin^2 2t dt-\frac{1}{8}\int \sin^2 2t\cos 2t dt$.

נחשב את $\int \sin^2 2t dt$. נשתמש שוב בזהות $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

$\int \sin^2 2t dt=\int\frac{1}{2}dt-\frac{1}{2}\int\cos 4t dt=\frac{t}{2}-\frac{\sin 4t}{8}$.

$\int \sin^2 2t\cos 2t dt=\frac{\sin^3 2t}{6}$.

סה"כ נקבל ש $\int \sin^4 t\cos^2 t dt=\frac{t}{16}-\frac{\sin 4t}{64}-\frac{\sin^3 2t}{48}$

$x=\sin t$

נשתמש בזהויות: $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$, $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$, $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

$$\sin 4t=2\sin 2t\cos 2t=4\sin t\cos t(1-2\sin^2 t)=(4\sin t-8\sin^3 t)\sqrt{1-\sin^2 t}=(4x-8x^3)\sqrt{1-x^2}$$
.

$$\sin^3 2t=8\sin^3 t\cos^3 t=8\sin^3 t(1-\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}$$

סה"כ נקבל

$$\int x^4\sqrt{1-x^2}dx=\frac{\arcsin x}{16}-\frac{x\sqrt{1-x^2}}{16}+\frac{x^3\sqrt{1-x^2}}{8}-\frac{x^3(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}{6}+C=$$
$$\frac{\arcsin x}{16}+x\sqrt{1-x^2}\left[-\frac{1}{16}-\frac{x^2}{24}+\frac{x^4}{6}\right]+C$$

<u>סעיף ב</u>

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{1-4x^2}}dx$$

נציב $x=\frac{\sin t}{2}$ ונקבל $dx=\frac{\cos t}{2}dt$

$$\sqrt{1-4x^2}=\sqrt{1-4\cdot\frac{\sin^2 t}{4}}=|\cos t|$$

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{1-4x^2}}dx=\int\frac{\sin^2 t}{4\cos t}\cdot\frac{\cos t}{2}dt=\frac{1}{8}\int\sin^2 tdt=\frac{1}{8}\int\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\frac{t}{16}-\frac{\sin 2t}{32}=$$

$$=\frac{t}{16}-\frac{\sin t\cos t}{16}=\frac{t-\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}}{16}=\frac{\arcsin 2x-2x\sqrt{1-4x^2}}{16}+c$$

<u>סעיף ג</u>

נציב $x=3\tan t$ ואז $dx=\frac{3dt}{\cos^2 t}$.

$$\int\sqrt{x^2+9}dx=\int\frac{3\sqrt{9\tan^2 t+9}}{\cos^2 t}dt=3\int\sqrt{\frac{9}{\cos^2 t}}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}dt=9\int\frac{1}{\cos^3 t}dt$$

נשאר לחשב את $\int\frac{1}{\cos^3 t}dt$. נציב $u=\sin t$ ואז $du=\cos tdt$.

$$\int\frac{1}{\cos^3 t}dt=\int\frac{\cos t}{\cos^4 t}dt=\int\frac{\cos t}{\left(1-\sin^2 t\right)^2}dt=\int\frac{1}{\left(1-u^2\right)^2}du=\int\frac{1}{(1+u)^2(1-u)^2}du=$$

$$\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{(1+u)^2}+\frac{1}{1-u}+\frac{1}{(1-u)^2}\right)du=\frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|-\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\right)=\frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+\frac{2u}{1-u^2}\right)$$

נציב חזרה $u=\sin t$ ונקבל $9\int\frac{1}{\cos^3 t}dt=\frac{9}{4}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|+\frac{9\sin t}{2\cos^2 t}$

נשתמש בזהות $\tan^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$.

נשים לב ש $\frac{\sin t}{\cos^2 t}=\tan t\cdot\frac{1}{\cos t}=\tan t\cdot\sqrt{\tan^2 t+1}$

$$\frac{1+\sin t}{1-\sin t}=\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\cdot\frac{1+\sin t}{1+\sin t}=\frac{1+2\sin t+\sin^2 t}{\cos^2 t}=\frac{1}{\cos^2 t}+2\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}$$

מהזהויות שרשמתי לפני כן נקבל ש

$$\frac{1+\sin t}{1-\sin t}=\tan^2 t+1+2\tan t\sqrt{\tan^2 t+1}+\tan^2 t=2\tan^2 t+2\tan t\sqrt{\tan^2 t+1}+1=$$

$$\left(\tan t+\sqrt{\tan^2 t+1}\right)^2$$

$$\frac{9}{4}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|+\frac{9\sin t}{2\cos^2 t}=\frac{9}{4}\ln\left(\tan t+\sqrt{\tan^2 t+1}\right)^2+\frac{9}{2}\tan t\sqrt{\tan^2 t+1}=$$

$$\frac{9}{2}\ln\left(\tan t+\sqrt{\tan^2 t+1}\right)+\frac{9}{2}\tan t\sqrt{\tan^2 t+1}$$

$$\frac{9}{2}\ln\left(\frac{x}{3}+\sqrt{\frac{x^2}{9}+1}\right)+\frac{9}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdot\sqrt{\frac{x^2}{9}+1}=\frac{9}{2}\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+9}}{3}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{x^2+9}$$

$$=\frac{9}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{x^2+9}-\frac{9}{2}\ln 3$$

הפתרון הוא עד כדי קבוע ולכן נקבל $\frac{9}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{x^2+9}+c$.

<u>שאלה 7</u>

חשב את האינטגרליים הבאים בעזרת הצבה אוניברסלית:

ד. $\int \frac{1}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}dx$.

ה. $\int \frac{1-3\sin 2x}{1+\cos 2x}dx$.

<u>פתרון שאלה 7</u>

<u>סעיף א</u>

נציב $t=\tan\frac{x}{2}$ ואז $\cos x=\frac{1-t^2}{t^2+1}, \sin x=\frac{2t}{t^2+1}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$.

$$\int \frac{1}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}dx=\int \frac{1}{\frac{2t}{t^2+1}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}t^2}{t^2+1}}\cdot\frac{2}{t^2+1}dt=\int \frac{2dt}{-\sqrt{3}t^2+2t+\sqrt{3}}=\int \frac{2dt}{\left(-\sqrt{3}t-1\right)\left(t-\sqrt{3}\right)}$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t-\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{dt}{-\sqrt{3}t-1}=-\frac{1}{2}\ln\left|t-\sqrt{3}\right|+\frac{1}{2}\ln\left|-\sqrt{3}t-1\right|=-\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}-\sqrt{3}\right|+\frac{1}{2}\ln\left|-\sqrt{3}\tan\frac{x}{2}-1\right|$$

<u>סעיף ב</u>

נציב $t=tgx$ ואז $dx=\frac{dt}{1+t^2}, \sin 2x=\frac{2t}{1+t^2}, \cos 2x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\int\frac{1-3\sin 2x}{1+\cos 2x}dx=\int\left(1-\frac{6t}{1+t^2}\right):\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2}=$$

$$=\int\frac{t^2-6t+1}{1+t^2}:\left(\frac{2}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2}=\int\frac{t^2-6t+1}{2+2t^2}dt=\frac{1}{2}\int\left(\frac{t^2+1}{t^2+1}-\frac{6t}{t^2+1}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(1-3\cdot\frac{2t}{t^2+1}\right)dt=\frac{t}{2}-\frac{3}{2}\ln\left(t^2+1\right)+c=\frac{tgx}{2}-\frac{3}{2}\ln\left((tgx)^2+1\right)+c$$

<u>שאלה 8</u>

פתור באמצעות נוסחת נסיגה את האינטגרל הבא:

$$\int x^n\sin xdx$$

<u>פתרון שאלה 8</u>

נסמן $I_n=\int x^n\sin xdx$. נחשב תחילה את I_1 .

$$I_1=\int x\sin xdx=-x\cos x+\sin x$$

נחשב את $I_n=\int x^n\sin xdx$ בעזרת אינטגרציה בחלקים ונקבל

$$I_n=\int x^n\sin xdx=-x^n\cos x+n\int x^{n-1}\cos xdx=-x^n\cos x+n\left(x^{n-1}\sin x\right)-n(n-1)\int x^{n-2}\sin xdx=$$

$$=-x^n\cos x+nx^{n-1}\sin x-n(n-1)I_{n-2}$$

מכיוון שקיבלנו את I_n באמצעות I_{n-2} יש לחשב בנוסף ל I_1 גם את I_2 .

$I_2=\int x^2\sin xdx$.

נפתור בעזרת אינטגרציה בחלקים

נסמן:

$u'=2x \Leftarrow u=x^2$

$v=-\cos x \Leftarrow v'=\sin x$

$$I_2=\int x^2\sin x dx=-x^2\cos x+2\int x\cos x dx=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x$$

נקבל את התשובה

$$I_n=-x^n\cos x+nx^{n-1}\sin x-n(n-1)I_{n-2}$$
$$I_1=-x\cos x+\sin x$$
$$I_2=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x$$