בס"ד

# תירגול 10 באלגברה לינארית

## הנושא: קבוצה אורתוגונלית ותהליך גראם-שמידט

**הגדרה:** קבוצה $S$ של וקטורים ב-$V$ נקראת אורתוגונלית אם כל זוג וקטורים ב-$S$ הוא אורתוגונלי, כלומר לכל $u,v\in S$: $\langle u,v\rangle=0$.
$S$ נקראת אורתונורמלית אם $S$ אורתוגונלית והנורמה של כל וקטור הוא $1$. (נזכיר שהנורמה של וקטור $u$ הוא: $\|u\|=\sqrt{\langle u,u\rangle}$).
בסיס $S$ של מרחב וקטורי $V$ נקרא בסיס אורתוגונלי או בסיס אורתונורמלי בהתאם לכך, אם $S$ היא קבוצה אורתוגונלית או אורתונורמלית של וקטורים.

**הערה:** בהינתן קבוצה אורתוגונלית $\{u_1,\dots,u_k\}$ קל מאוד להפוך אותה לקבוצה אורתונורמלית ע"י שנחלק כל וקטור בנורמה שלו. כלומר, הקבוצה $\left\{\frac{u_1}{\|u_1\|},\dots,\frac{u_k}{\|u_k\|}\right\}$ היא מערכת אורתונורמלית.

לתהליך זה קוראים - "נירמול".

**משפט:** נניח ש-$S$ קבוצה אורתוגונלית של וקטורים שונים מאפס. אזי $S$ בלתי-תלויה-לינארית.

**משפט פיתגורס:** תהי $\{u_1,u_2,\dots,u_r\}$ קבוצה אורתוגונלית של וקטורים. אזי:
$$\|u_1+u_2+\dots+u_r\|^2=\|u_1\|^2+\|u_2\|^2+\dots+\|u_r\|^2$$

**דוגמאות:**

**דוגמא 1:** נסתכל על הבסיס הרגיל $E$ של המרחב $\mathbb{R}^3$:
$$E=\{e_1=(1,0,0),\ e_2=(0,1,0),\ e_3=(0,0,1)\}$$
מתקיים ש: $\langle e_1,e_1\rangle=\langle e_2,e_2\rangle=\langle e_3,e_3\rangle=1$
ו- $\langle e_1,e_2\rangle=\langle e_1,e_3\rangle=\langle e_2,e_3\rangle=0$
לכן $E$ הוא בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^3$.
באופן כללי יותר, הבסיס הרגיל של $\mathbb{R}^n$ אורתונורמלי עבור כל $n$.

**דוגמא 2:** נסתכל על הקבוצה הבאה $S$ של וקטורים ב-$\mathbb{R}^4$:
$$S=\{u=(1,2,-3,4),\ v=(3,4,1,-2),\ w=(3,-2,1,1)\}$$
נשים לב ש:
$$\langle u,v\rangle=1\cdot3+2\cdot4+(-3)\cdot1+4\cdot(-2)=0$$
$$\langle u,w\rangle=1\cdot3+2\cdot(-2)+(-3)\cdot1+4\cdot1=0$$
$$\langle v,w\rangle=3\cdot3+4\cdot(-2)+1\cdot1+(-2)\cdot1=0$$

<u>קס"ד</u>

לכן $S$ <u>אורתוגונלית</u>. ננרמל את $S$ כדי לקבל קבוצה אורתונורמלית.
נחשב תחילה את הנורמות:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u,u \rangle} = \sqrt{1^2+2^2+(-3)^2+4^2} = \sqrt{30}$$

$$\|v\| = \sqrt{\langle v,v \rangle} = \sqrt{3^2+4^2+1^2+(-2)^2} = \sqrt{30}$$

$$\|w\| = \sqrt{\langle w,w \rangle} = \sqrt{3^2+(-2)^2+1^2+1^2} = \sqrt{15}$$

אז הוקטורים הבאים יוצרים קבוצה <u>אורתונורמלית</u> של וקטורים:

$$\hat{u} = \frac{u}{\|u\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{-3}{\sqrt{30}}, \frac{4}{\sqrt{30}}\right)$$

$$\hat{v} = \frac{v}{\|v\|} = \left(\frac{3}{\sqrt{30}}, \frac{4}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{-2}{\sqrt{30}}\right)$$

$$\hat{w} = \frac{w}{\|w\|} = \left(\frac{3}{\sqrt{15}}, \frac{-2}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}\right)$$

---

<u>משפט:</u> נניח ש- $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ הוא בסיס אורתוגונלי ל- $V$. אזי עבור כל $v \in V$:

$$v = \frac{\langle v,u_1 \rangle}{\langle u_1,u_1 \rangle} u_1 + \frac{\langle v,u_2 \rangle}{\langle u_2,u_2 \rangle} u_2 + \dots + \frac{\langle v,u_n \rangle}{\langle u_n,u_n \rangle} u_n$$

<u>הערה:</u> הסקלר שלעיל - $k_i = \frac{\langle v,u_i \rangle}{\langle u_i,u_i \rangle} = \frac{\langle v,u_i \rangle}{\|u_i\|^2}$ נקרא מקדם פורייה של $v$ ביחס ל- $u_i$.

---

<u>היטלים</u>

נסתכל על הוקטור $w \neq \vec{0}$ במרחב מכפלה פנימית $V$. לכל $v \in V$ מתקיים ש- $c = \frac{\langle v,w \rangle}{\langle w,w \rangle} = \frac{\langle v,w \rangle}{\|w\|^2}$ הוא הסקלר היחיד כך ש- $v' = v - cw$ אורתוגונלי ל- $w$.

<u>הגדרה:</u> <u>ההיטל</u> של $v$ לאורך $w$ מסומן ומוגדר ע"י:

$$\text{proj}(v,w) = cw = \frac{\langle v,w \rangle}{\langle w,w \rangle} \cdot w = \frac{\langle v,w \rangle}{\|w\|^2} \cdot w$$

הסקלר $c$ נקרא גם "מקדם פורייה של $v$ ביחס ל- $w$" או - "הרכיב של $v$ לאורך $w$".

<u>דוגמא:</u>

נמצא את הרכיב $c$ ואת ההיטל $cw$ של $v=(1,2,3,4)$ לאורך $w=(1,-3,4,-2)$ ב- $\mathbb{R}^4$.

←

בס״ד

תחילה נחשב: $\langle v,w\rangle = 1\cdot 1+2\cdot(-3)+3\cdot 4+4\cdot(-2)=-1$

$$\|w\|^2=\langle w,w\rangle = 1^2+(-3)^2+4^2+(-2)^2=30$$

$$\Downarrow$$

$$c=\frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2}=-\frac{1}{30}$$

לכן ההיטל הוא:

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{proj}(v,w)=cw=-\frac{1}{30}(1,-3,4,-2)=\left(-\frac{1}{30},\frac{1}{10},-\frac{2}{15},\frac{1}{15}\right)$$

---

<u>משפט*</u>: נניח ש- $w_1,w_2,\dots,w_r$ יוצרים קבוצה אורתוגונלית של וקטורים שונים מאפס ב- $V$. יהי $v$ וקטור כלשהו ב- $V$.
נגדיר - $v'=v-c_1w_1-c_2w_2-\dots-c_rw_r$ כאשר:

$$c_1=\frac{\langle v,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}\ ,\quad c_2=\frac{\langle v,w_2\rangle}{\|w_2\|^2}\ ,\ \dots,\quad c_r=\frac{\langle v,w_r\rangle}{\|w_r\|^2}$$

אזי $v'$ אורתוגונלי ל- $w_1,w_2,\dots,w_r$.

---

## <u>תהליך האורתוגונליזציה של גראם-שמידט</u>

נניח ש- $\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ הוא בסיס של מרחב מכפלה פנימית $V$.
ניתן לקבל בסיס אורתוגונלי $\{w_1,w_2,\dots,w_n\}$ עבור $V$ באופן הבא:
נגדיר:

$$w_1=v_1$$

$$w_2=v_2-\frac{\langle v_2,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}w_1$$

$$w_3=v_3-\frac{\langle v_3,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}w_1-\frac{\langle v_3,w_2\rangle}{\|w_2\|^2}w_2$$

$$\vdots$$

$$w_n=v_n-\frac{\langle v_n,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}w_1-\frac{\langle v_n,w_2\rangle}{\|w_2\|^2}w_2-\dots-\frac{\langle v_n,w_{n-1}\rangle}{\|w_{n-1}\|^2}w_{n-1}$$

לפי משפט* כל $w_k$ עבור $k=2,3,\dots,n$ אורתוגונלי ל- $w$-ים הקודמים.
לכן $w_1,w_2,\dots,w_n$ יוצרים בסיס <u>אורתוגונלי</u> ל- $V$. נירמול כל $w_k$ יתן בסיס <u>אורתונורמלי</u> ל- $V$. זהו תהליך גראם-שמידט.

<u>הערה</u>: ניתן לפשט את החישובים ע״י סילוק השברים בעזרת הכפלת $w_k$ בסקלר מתאים, מאחר שפעולה זו אינה משפיעה על האורתוגונליות.

<u>דוגמא</u>: נסתכל על תת-המרחב $U$ של $\mathbb{R}^4$ הנפרש ע״י:

$$v_1=(1,1,1,1)\ ,\quad v_2=(1,2,4,5)\ ,\quad v_3=(1,-3,-4,-2)$$

נמצא בסיס אורתונורמלי ל- $U$.

בס"ד

**פתרון:**

ראשית, נמצא בסיס אורתוגונלי ל-$U$ באמצעות אלגוריתם גרם-שמידט.

נציב:

$$w_1 = v_1 = \boxed{(1,1,1,1)}$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}\cdot w_1 = (1,2,4,5) - \frac{1\cdot1+2\cdot1+4\cdot1+5\cdot1}{1^2+1^2+1^2+1^2}\cdot(1,1,1,1) =$$

$$= (1,2,4,5) - \frac{12}{4}(1,1,1,1) = \boxed{(-2,-1,1,2)}$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}\cdot w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2}\cdot w_2 =$$

$(-2,-1,1,2)$

$$= (1,-3,-4,-2) - \frac{1\cdot1-3\cdot1-4\cdot1-2\cdot1}{4}\cdot(1,1,1,1) - \frac{1\cdot(-2)+(-3)\cdot(-1)+(-4)\cdot1-4}{(-2)^2+(-1)^2+1^2+2^2}(-2,-1,1,2)$$

$$= (1,-3,-4,-2) - \frac{-8}{4}(1,1,1,1) - \frac{-7}{10}(-2,-1,1,2) =$$

$$= (1,-3,-4,-2) + (2,2,2,2) + \left(\frac{-7}{5}, \frac{-7}{10}, \frac{7}{10}, \frac{7}{5}\right) = \boxed{\left(\frac{8}{5}, \frac{-17}{10}, \frac{-13}{10}, \frac{7}{5}\right)}$$

נסלק שברים ע"י מכפלה ב-10 ונקבל (לפי ההערה): $\boxed{w_3 = (16,-17,-13,14)}$.

לבסוף, ננרמל את הבסיס האורתוגונלי שקיבלנו, כדי לקבל בסיס אורתונורמלי.

$$\hat{w}_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{(1,1,1,1)}{\sqrt{4}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\hat{w}_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{(-2,-1,1,2)}{\sqrt{10}} = \left(\frac{-2}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\hat{w}_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{(16,-17,-13,14)}{\sqrt{910}} = \left(\frac{16}{\sqrt{910}}, \frac{-17}{\sqrt{910}}, \frac{-13}{\sqrt{910}}, \frac{14}{\sqrt{910}}\right)$$

הוקטורים $\hat{w}_1, \hat{w}_2, \hat{w}_3$ יוצרים בסיס אורתונורמלי ל-$U$.

**מש"ל.**

---

**הערה:** יהיו $u=(u_1,\dots,u_n)$ ו-$v=(v_1,\dots,v_n)$ וקטורים ב-$\mathbb{C}^n$. (בשביל תרגיל הבית)

אזי: $\langle u,v\rangle = u_1\cdot\bar{v}_1 + u_2\cdot\bar{v}_2 + \dots + u_n\cdot\bar{v}_n$

היא מכפלה פנימית על $\mathbb{C}^n$ הנקראת - <u>המכפלה הפנימית הרגילה</u> או הסטנדרטית <u>על $\mathbb{C}^n$</u>. במקרה בו $u$ ו-$v$ הם ממשיים נקבל $\bar{v}_i = v_i$ ואז המכפלה הפנימית הנ"ל מצטמצמת למכפלה הפנימית הרגילה על $\mathbb{R}^n$:

$\langle u,v\rangle = u_1\cdot\bar{v}_1 + u_2\cdot\bar{v}_2 + \dots + u_n\cdot\bar{v}_n = u_1\cdot v_1 + \dots + u_n v_n$.

המשך

**תרגיל:** נניח ש- $S, S_1, S_2$ הן תת-קבוצות של $V$. הוכח ש:

א. $S \subseteq S^{\perp\perp}$

ב. אם $S_1 \subseteq S_2$, אזי - $S_2^{\perp} \subseteq S_1^{\perp}$.

ג. $S^{\perp} = (\text{span } S)^{\perp}$.

**הוכחה:**

א. יהי $w \in S$. אזי $\langle w, v \rangle = 0$ לכל $v \in S^{\perp}$. לכן $w \in S^{\perp\perp}$.
ומכאן $S \subseteq S^{\perp\perp}$. מש"ל-א'.

ב. יהי $w \in S_2^{\perp}$. אזי $\langle w, v \rangle = 0$ לכל $v \in S_2$.
מאחר ש: $S_1 \subseteq S_2$ : $\langle w, v \rangle = 0$ לכל $v \in S_1$. (כי זה נכון לכל $v \in S_2$ ובפרט עבור $v \in S_1$).
לכן $w \in S_1^{\perp}$ ולכן $S_2^{\perp} \subseteq S_1^{\perp}$. מש"ל-ב'.

ג. מאחר ש- $S \subseteq \text{span } S \Rightarrow \boxed{(\text{span } S)^{\perp} \subseteq S^{\perp}}$, לפי סעיף ב'.
נניח ש- $u \in S^{\perp}$ ונניח ש- $v \in \text{span } S$. אזי קיימים: $w_1, w_2, \dots, w_k$
ב- $S$ כך ש: $v = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_k w_k$
אז בשימוש ב- $u \in S^{\perp}$ יש לנו:

$$\langle u, v \rangle = \langle u, a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_k w_k \rangle =$$
$$= \bar{a}_1 \langle u, w_1 \rangle + \bar{a}_2 \langle u, w_2 \rangle + \dots + \bar{a}_k \langle u, w_k \rangle =$$
$$= \bar{a}_1 \cdot 0 + \bar{a}_2 \cdot 0 + \dots + \bar{a}_k \cdot 0 = 0$$

כי $u \in S^{\perp}$ ו- $w_i \in S$

קיבלנו ש: $\langle u, v \rangle = 0$ וכיוון ש- $v \in \text{span } S$ אזי מקבלים ש: $u \in (\text{span } S)^{\perp}$. מכאן נובע ש: $\boxed{S^{\perp} \subseteq (\text{span } S)^{\perp}}$.
שתי ההכלות נותנות: $S^{\perp} = (\text{span } S)^{\perp}$.

מש"ל-ג'.