7ב.

נתחיל בפירוק של 30 מעל $\mathbb{Z}$: $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.

אם כך צריך לבדוק את שאלת פריקות 2,3,5 מעל $\mathcal{O}_{-11}$.

$N(x+y\sqrt{-11}) = x^2+11y^2$.

איבר כללי ב־ $\mathcal{O}_{-11}$ הוא מהצורה $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\sqrt{-11}$, כאשר a,b בעלי אותה זוגיות.

2 פריק אם ורק אם קיים $z \in \mathcal{O}_{-11}$ כך ש $N(z)=2$ (הראו זאת! רמז: לא ייתכן איבר עם נורמה שלילית).

נקבל $N(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\sqrt{-11})=2$ אם ורק אם $a^2+11b^2=8$. קל לראות שזה לא יתכן, ולכן 2 אי־פריק, וכיוון שהחוג בעל פריקות יחידה, נקבל שהוא גם ראשוני.

נראה ש 3 פריק: ניתן לראות שמתקיים $3 = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-11}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-11}\right)$ (כדי למצוא את הפתרון, השתמשתי במשוואה $a^2+11b^2=12$).

האיבר $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-11}\right)$ בעל נורמה 3, ולכן הוא אי־פריק, ולכן ראשוני.

נראה ש 5 פריק: ניתן לראות שמתקיים $5 = \left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-11}\right)\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-11}\right)$ (כדי למצוא את הפתרון, השתמשתי במשוואה $a^2+11b^2=20$).

בצורה דומה רואים שמתקיים $\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-11}\right)$ אי־פריק.

לכן קיבלנו שהפירוק הראשוני הוא: $30 = 2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-11}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-11}\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-11}\right)\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-11}\right)$.

בונוס:

נסמן $R=\mathbb{R}[x]$ ו־ $M=\mathbb{R}^2$.

אם מתקיים $M \cong R/<(x-2)^2>$ אזי כיוון ש R מודול ציקלי מעל R, בהכרח גם M מודול ציקלי מעל R (מדוע?!)

לכן כדאי למצוא את היוצר של M.

ניחוש טוב הוא להתחיל עם אחד מהוקטורים $(1,0),(0,1)$. לפי הגדרת המודול מתקיים $x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

לכן ע"י מניפולציה אלגברית קלה נקבל $(-2x+5)\cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

כיוון שמתקיים $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\cdot 1$, נקבל ש $(1,0),(0,1)\in R\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, ומכאן (הסבירו!) נקבל שמתקיים $M=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}R$.

נגדיר הומ' מודולים $\varphi : R\to M$ ע"י: $\varphi(f(x))=f(x)\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$. קל להראות (!) ש φ על, ולכן נשאר רק להראות ש הגרעין הוא בדיוק $<(x-2)^2>$ (ולסיים עם איזו' 1)

הגרעין הוא בדיוק $ann\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = annM$ (הראו זאת!)

חישוב לא מסובך מראה שהפולינום האפייני של $\begin{matrix}\frac{5}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{matrix}$ הוא בדיוק $(x-2)^2$.

מכאן ש $(x-2)^2\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=0$ ולכן קל לראות שמתקיים $<(x-2)^2>\subseteq annM$.

ההכלה בכיוון השני מתקיימת בגלל תכונות של הפולינום המינימלי. לכן סיימנו.