אינפי 4 - תרגול 2

3 באוגוסט 2011

דוגמה

ניקח אליפסויד:

$$E=\left\{x^2+17y^2+7z^2=3\right\}$$

ניקח נק' $(x_0,\, y_0,\, z_0)\in E$.
צריך למצוא את משוואה המישור המשיק לקבוצה E בנק' $(x_0,\, y_0,\, z_0)$.

פתרון

$$\begin{aligned}
dE\left(x_0,\, y_0,\, z_0\right) &= \begin{pmatrix}2x_0 & 34y_0 & 14z_0\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}2x_0 & 34y_0 & 14z_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\\ z-z_0\end{pmatrix} &= 0\\
x_0x+17y_0y+7z_0z &= x_0^2+17y_0^2+7z_0^2\\
x_0x+17y_0y+7z_0z &= 3
\end{aligned}$$

וזו משוואת המישור המשיק.

תרגיל

נגדיר קבוצה x_ℓ כקבוצה של מיקומים של מוט באורך ℓ ב-$\mathbb{R}^3$ כאשר קצה אחד של המוט נמצא על ציר הx והקצה השני על כדור ברדיוס 1 שמרכזו בראשית הצירים.
משוואת הכדור היא

$$x^2+y^2+z^2=1$$

נקרא לנק' על ציר הx עליה נמצא קצה המוט $(t,\, 0,\, 0)$.
אורך המוט הוא:

$$(t-x)^2+y^2+z^2=\ell^2$$

לכן סה"כ

$$x_\ell=\left\{(x,\, y,\, z)\ \mid\ \begin{matrix}x^2+y^2+z^2=1\\ \left(t-x^2\right)+y^2+z^2=\ell^2\end{matrix}\right\}$$

נמצא עכשיו מישור משיק בנק':

$$p=\begin{pmatrix}1+\ell\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

נגדיר פונק':

$$f\left(t,\,x,\,y,\,z\right)=\begin{pmatrix}x^{2}+y^{2}+z^{2}-1\\\left(t-x\right)^{2}+y^{2}+z^{2}-\ell^{2}\end{pmatrix}=0$$

נמצא דיפרנציאל:

$$df=\begin{pmatrix}0 & 2x & 2y & 2z\\2\left(t-x\right) & -2\left(t-x\right) & 2y & 2z\end{pmatrix}$$

נפתור את המערכת:

$$df\cdot\begin{pmatrix}t\\x\\y\\z\end{pmatrix}=0$$

זה מתקיים ב-$\ker\left(df\right)$.
נמצא את הגרעין של df:

$$df\left(p\right)=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0 & 0\\2\ell & -2\ell & 0 & 0\end{pmatrix}$$

אם נפתור את המערכת הקודמת נקבל שעבור המערכת

$$df\left(p\right)\cdot\begin{pmatrix}t\\x\\y\\z\end{pmatrix}=0$$

מתקיים:

$$\begin{aligned}t & = x=0\\z,\,y & \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

אזי מתקיים:

$$\ker\left(df\left(p\right)\right)=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\,\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

לכן המישור המשיק הוא:

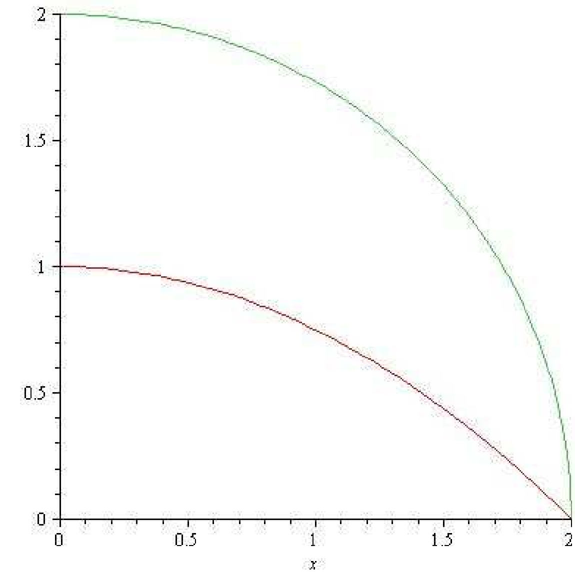
$$M=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}t_{1}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}t_{2}+\begin{pmatrix}1+\ell\\1\\0\\0\end{pmatrix}\;\mid t_{1},\,t_{2}\in\mathbb{R}\right\}$$

תרגיל

$$\int_0^2 dx \int_{\frac{4-x^2}{4}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,\, y)\, dy$$

1. ציירו את התחום.
2. שנו את סדר האינטגרציה.

פתרון



.1

.2

$$\int_0^2 dx \int_{\frac{4-x}{4}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,\, y)\, dy = \int_0^1 dy \int_{2\sqrt{1-y}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,\, y)\, dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x,\, y)\, dx$$

תרגיל

פתור:

$$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\, dxdy$$

$$D = \begin{Bmatrix} 1 \le x+y \le 2 \\ x \ge 0,\, y \ge 0 \end{Bmatrix}$$

פתרון

נבצע החלפת משתנים:

$$\begin{aligned}u &= x+y\\ v &= x-y\\ x &= \frac{u+v}{2}\\ y &= \frac{u-v}{2}\\ \frac{\partial(x,\,y)}{\partial(u,\,v)} &= \begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

ונפתור את האינטגרל:

$$\begin{aligned}\iint\limits_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy &= \int\limits_1^2 du\int\limits_{-u}^{u}\frac{1}{2}e^{\frac{v}{u}}du\\ &= \frac{3}{4}\left(e-e^{-1}\right)\end{aligned}$$

תרגיל

פתרו:

$$\iiint\limits_V f(x,\,y,\,z)\,dxdydz$$

עבור הפונק' והמשטח:

$$\begin{aligned}f &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\ V &= \begin{Bmatrix}x^2+y^2+z^2\geq a^2\\ x^2+y^2+z^2\leq 4a^2\end{Bmatrix}\end{aligned}$$

נבצע החלפת משתנים למשתנים כדוריים:

$$\begin{aligned}f(r,\,\varphi,\,\theta) &= \frac{1}{r}\\ D &= \left\{a^2\leq r^2\leq 4a^2\right\}\\ |J| &= r^2\sin\theta\end{aligned}$$

$$I=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_a^{2a}\frac{1}{r}r^2dr=2\pi\cdot(-\cos\theta)\,|_0^{\pi}\cdot\frac{r^2}{2}|_a^{2a}=2\pi\cdot 2\cdot\frac{3a^2}{2}=6\pi a^2$$