תרגיל 7

15 בינואר 2017

1. תהי A קבוצה ו־R יחס רפלקסיבי עליה. הוכיחו כי: $\forall n \in \mathbb{N} : R^n \subseteq R^{n+1}$, כלומר: $R \subseteq R^2 \subseteq R^3 \subseteq ...$. (רמז: אל תנסו אינדוקציה)
פתרון:

נשים לב ש־ $R^{n+1} = R \circ R^n$. יהי $(a,b) \in R^n$, צ"ל ש־ $(a,b) \in R^{n+1}$. נשים לב שכיון ש־R רפלקסיבי מתקיים ש־ $(b,b) \in R$, ולכן מהגדרת הרכבת יחסים נקבל שאם $(a,b) \in R^n \wedge (b,b) \in R$ אז $(a,b) \in R \circ R^n = R^{n+1}$, כדרוש.

2. תהי X קבוצת בנייני האוניברסיטה, ונגדיר יחס "סמיכות" $R \subseteq X \times X$ ע"י: $(a,b) \in R$ אם ורק אם המרחק בין הבניין a והבניין b קטן או שווה למאה מטרים (רוצים הגדרה מדוייקת? אז שיהיה המרחק האוקלידי ב־ $\mathbb{R}^3$ בין מרכזי המסות של הבניינים...). האם R הוא בהכרח (כלומר, אל תלכו לבדוק מרחקים :
א. רפלקסיבי
ב. טרנזיטיבי
ג. סימטרי
ד. אנטי סימטרי
פתרון:

א. כן. המרחק בין בנין לעצמו הוא 0. כלומר, הבניין סמוך לעצמו.

ב. לא. יכולים להיות שלושה בניינים בשורה שהמרחק בין הראשון לשני הוא 75 מטר וכנ"ל בין השלישי לשני, ואז בין הראשון לשלישי יש 150 מטר ולכן הם לא סמוכים.

ג. כן. למרחק לא משנה מי משמאל ומי מימין.

ד. לא. יכולים להיות שני בניינים סמוכים שונים.

3. א. בקבוצה $\{2,3,4,...,999,1000\}$ הסדורה חלקית לפי $|$ (מחלק ללא שארית) ישנם בדיוק 500 איברים מקסימליים מהם?
ב. רשום לפחות 10 איברים מינימליים בקבוצה סדורה זו.
ג. האם יש בקס"ח זו איבר קטן ביותר או איבר גדול ביותר? אם אין הוסף 2 מספרים לקבוצה שימלאו תפקידים אלו. מה יהיו האיברים המינימליים והמקסימליים בקס"ח המורחבת?

פתרון:
א. כל האיברים בין 501 ל־ 1000 אינם מחלקים אף מספר בקבוצה ולכן מקסימליים, לכל שאר האיברים קיים בקבוצה איבר שהוא פי שניים מהם לכן הם מחלקים אותו ואינם מקסימלים.
ב. צריך פשוט לבחור מספרים ראשוניים שכמובן לא מתחלקים באף מספר.

$\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,...\}$.

ג. אין איבר קטן ביותר וגם אין איבר גדול ביותר. אם היה אז הוא היה המקסימלי\מינימלי יחיד, והראנו שיש הרבה מקסימליים\מינימליים.
אם נוסיף את 1 הוא יהיה מינימום ו־$1000! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot 999\cdot 1000$ יהיה מקסימום כי כל איבר מחלק אותו. (אפשר למצוא מקסימום קטן יותר שהוא בדיוק הכפולה המשותפת המינימלית).

4. תהי A קבוצה ויהי R יחס סדר חלקי על A.
א. נגדיר את היחס ההופכי של R על A בצורה הבאה: $R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b)\in R\}$.
הוכיחו כי R^{-1}יחס סדר חלקי.
ב. תהי $B\subseteq A$ נגדיר $S = R\cap (B\times B)$ הוכיחו כי S הוא יחס סדר על B.
פתרון:
א.
רפלקסיביות: לכל $a\in A$ $(a,a)\in R$ ולפי הגדרת R^{-1} מתקיים $(a,a)\in R^{-1}$.
אנטי סימטרי: צ"ל $a=b \longleftarrow (a,b),(b,a)\in R^{-1}$
נניח כי $(a,b),(b,a)\in R^{-1}$ אז $(b,a),(a,b)\in R$ אבל R יחס סדר חלקי ולכן אנטי סימטרי לכן בהכרח $a=b$.
טרנזטיבי: $(a,b),(b,c)\in R^{-1} \longrightarrow (a,c)\in R^{-1}$.
נניח כי $(a,b),(b,c)\in R^{-1}$ אזי $(b,a),(c,b)\in R$ אבל R טרנזיטיבי (כי הוא יחס סדר) ולכן $(c,a)\in R$ ולכן $(a,c)\in R^{-1}$.
ב.
רפלקסיבי: לכל $b\in B$ מתקיים $b\in A$ כי $B\subseteq A$, ולכן $(b,b)\in R$ (כי R רפלקסיבי כיחס מעל A). כמובן שמתקיים $(b,b)\in B\times B$ ולכן $(b,b)\in R\cap B\times B = S$.
אנטי סימטרי: נניח כי $(a,b),(b,a)\in S = R\cap B\times B$ אזי $(a,b),(b,a)\in R$ ולכן $a=b$ כי R אנטי סימטרי.
טרנזטיביות: נניח כי $(a,b),(b,c)\in S = R\cap B\times B$ אזי $(a,b),(b,c)\in R$ וגם $(a,b),(b,c)\in B\times B$ (מהגדרה של S כחיתוך של R עם $B\times B$)
$(a,b),(b,c)\in R$ לכן ניתן להסיק כי $(a,c)\in R$ כי R טרנזטיבי.
$(a,b),(b,c)\in B\times B$ לכן ניתן להסיק כי $(a,c)\in B\times B$ (כי מהגדרת מכפלה קרטזית בהכרח $a,b,c\in B$).
ולכן בסה"כ $(a,c)\in R\cap B\times B$.

5. הוכח או הפרך:
א. A קבוצה R יחס סדר חלקי מעל A, אם $a\in A$ איבר מינימלי יחיד אזי a הוא איבר קטן ביותר (מינימום) ב־A?
ב. A קבוצה סופית, R יחס סדר חלקי מעל A. אם $a\in A$ איבר מינימלי יחיד אזי a הוא איבר קטן ביותר (מינימום) ב־A?

פתרון:
א. דוגמה נגדית נגדיר יחס R מעל $A = \mathbb{Z}\cup\{\{1\}\}$, בצורה הבאה aRb אם"ם $a,b\in\mathbb{Z}\wedge a\le b$ או $a=b=\{1\}$.
צ"ל שזה יחס סדר חלקי:
רפלקסיביות: לכל $a\in A$ אם $a=\{1\}$ אזי לפי ההגדרה aRa וכן אם $a\in\mathbb{Z}$ גם כן מתקיים aRa.
אנטי סמטריות: אם $(a,b),(b,a)\in R$ אזי אם $a=\{1\}$ אזי לפי ההגדרה $a=b$.

אם $a \in \mathbb{Z}$ אזי בהכרח לפי הגדרת היחס גם $b \in \mathbb{Z}$ ואם $a \leq b \wedge b \leq a$ בהכרח $a = b$.

טרנזטיביות: אם $(a,b),(b,c) \in R$ אזי אם $a = \{1\}$ אזי לפי ההגדרה $a = b = c$ וכמובן $(a,c) = (a,a) \in R$. אם $a \in \mathbb{Z}$ אזי בהכרח לפי הגדרת היחס גם $b \in \mathbb{Z}$ וגם $c \in \mathbb{Z}$ ומתקיים $a \leq b \leq c$ ובפרט $(a,c) \in R$.

$\{1\}$ הוא איבר מינימלי יחיד בקבוצה כי פרט לעצמו אף איבר לא ניתן להשוואה עימו, והוא לא הקטן ביותר כי אף איבר לא ניתן להשוואה עימו.

ב. נניח ש־a מינימלי יחיד נוכיח ש־a מינימום:

נסמן $B = \{b \in A \mid (a,b) \notin R\} \subseteq A$,

אם B ריקה אזי a קטן ביותר, וסיימנו. (נימוק אם B ריקה זה אומר לכל $b \in A$ מתקיים $(a,b) \in R$ שזה בדיוק הגדרת איבר קטן ביותר)

אם B אינה ריקה אזי בהכרח קיים בה איבר מינימלי נסמנו ב־b. (זה משפט שלא קשה להוכיח, בקבוצה סופית קיים איבר מינימלי ואיבר מקסימלי).

b מינימלי גם ב־A נימוק: לכל $x \in A$ $b \neq x$ אם $x \in B$ אזי $(x,b) \notin R$ (כי b מינימלי). ואם $x \notin B$ אזי $(a,x) \in R$ ואם $(x,b) \in R$ מטרנזיטביות נקבל ש־$(a,b) \in R$ סתירה ל־$b \in B$ ולכן $(x,b) \notin R$.

לכן bגם כן מינימלי בסתירה להיות a מינימלי יחיד, ולכן בהכרח B ריקה ו־a מינימום.