תרגיל 1 חוגים יאיר [illegible] מתרגל - תומר באומר

1 א) נקח $R=\mathbb{Z}$ $S=2\mathbb{Z}$

$S\le R$ R עם יחידה ו-S בלי.

כמובן שההפך לא נכון כי אם ~~[illegible]~~

$\begin{pmatrix}0&0\\0&a\end{pmatrix}\subseteq\begin{pmatrix}0&a\\0&b\end{pmatrix}$

עם יחידה. בלי יחידה

ב) ⇐ $\forall a,b\in R: ab=ba$

בפרט $\forall a,b\in S\subseteq R: ab=ba$

R חילופי ← S חילופי.

ההפך כמובן שלא נכון נקח $R=M_n(\mathbb{R})$, $\{cI : c\in\mathbb{R}\}=S=Z(M_n(\mathbb{R}))$

S חילופי ו-R לא.

ג) R תחום כלומר $\forall a,b\in R: a,b\neq 0 \to ab\neq 0$

בפרט $\forall a,b\in S\subseteq R: a,b\neq 0\to ab\neq 0$ S תחום כי

נקח $R=M_n(\mathbb{R})$ לא תחום, $S=Z(M_n(\mathbb{R}))$ תחום

ד) נניח $S=\mathbb{Z}\le R=\mathbb{Q}$ 2 הפיך ב-$\mathbb{Q}$ ולא הפיך ב-$\mathbb{Z}$. הכיוון השני גם לא נכון

נקח $\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}\le M_n(\mathbb{R})$

הפיך ב $\begin{pmatrix}0&0\\0&*\end{pmatrix}$

~~[illegible]~~

2 א) $S\times R$ חוג בלי יחידה, כי כפי שראינו בהרצאות

$R\times S$ חבורה חיבורית וכמובן ש $S\times R$ [illegible]

לבסוף, נראה דיסטריבוטיביות

$(a_1(b_1+c_1),a_2(b_2+c_2))=(a_1,a_2)\cdot((b_1,b_2)+(c_1,c_2))=(a_1b_1,a_2b_2)+(a_1c_1,a_2c_2)=(a_1,a_2)(b_1,b_2)$
$+(a_1,a_2)(c_1,c_2)$

נראה ש $(1_R,1_S)$ יחידה של $R\times S$

$\forall r\in R, s\in S: (r,s)\cdot(1_R,1_S)=(1_R,1_S)(r,s)=(r,s)$

ב) $\prod_{i\in I} R_i$ הוא אוסף כל הפונקציות $f:I\to\bigcup_i R_i$ כך ש $f(i)\in R_i$

נניח ש R_i חילופי לכל i, אזי לכל i ולכל $f,g\in\prod_i R_i$
$f(i)g(i)=g(i)f(i)$

ולכן $fg=gf$.

3 נניח $axy=xya=1$

x הפיך כי: $x(ay)=1=(ay)x$

y הפיך כי: $y(xa)=(xa)y=1$

נשים לב שלפי המשפט לכל מטריצה מעל חוג קומוטטיבי

הדבר נובע כי $\det(AB)=\det(A)\det(B)$ ⇐ $\det(A),\det(B)$ הפיכים ⇐ A,B הפיכים

הפיך AB הפיך

3) המשך

נסתכל על $A=\prod_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}$

ונסתכל על החוג $End(A)$

$$f((a_1,a_2,\dots))=(0,a_1,a_2,\dots)$$

$$g((a_1,a_2,\dots))=(a_2,\dots)$$

$$g\circ f=Id_A$$

אבל f חח"ע ולא על ו-g על ולא חח"ע

לכן f,g לא הפיכות.

4) נראה ש $R^\times\subseteq(R[x])^\times$ כי כל $a\in R^\times$ נמצא ב-$R[x]$.

ניקח $f\in(R[x])^\times$ עם הדרגה מינימלית שכן, מכיוון ש

$$\left(\sum a_i x^i\right)\left(\sum b_j x^j\right)=\sum c_k x^k$$

כאשר $k\ge 1$ בהכרח אין מקדם חופשי והפולינום לא הפיך.

5) א) תחום שלמות (לא שדה).

סגירות

$$\frac{m_1}{2n_1+1}+\frac{m_2}{2n_2+1}=\frac{m_1(2n_2+1)+m_2(2n_1+1)}{4n_1n_2+2(n_1+n_2)+1}\in R$$

$$\frac{m_1m_2}{(2n_1+1)(2n_2+1)}\in R$$

אסוציאטיביות, 0,1, $\left(\frac{m}{2n+1}\right)-\frac{m}{2n+1}=0$ הופכי.

אין מחלקי אפס ב-$\mathbb{Q}$ לכן אין מחלקי אפס ב-R.

נשים לב ש-R לא שדה כי $\frac{6}{3}=2\in R$ אבל $\frac{1}{2}\notin R$.

ב) לא חוג, כי אין סגירות: $\frac{5}{3}\in R$, $\frac{5}{3}+\frac{5}{3}=\frac{10}{3}\notin R$

ג) $R=(End(G),+,\circ)$

סגירות - רגיל, אסוציאטיביות דיסטריביוטיביות, יחידה, הופכי לחיבור

לכן R חוג.

ניקח $G=\mathbb{R}^2$ $f((a_1,a_2))=(0,a_2)$ $g((a_1,a_2))=(a_1,0)$

$0=g\circ f$ אבל $f,g\neq 0$

לכן R לא תחום.

ד) $R=(C[0,1],+,\circ)$ נשים לב שאפשר להגדיר את הפעולה על $C^\infty[0,1]$.

סגירות, אסוציאטיביות, יחידה, הופכי - ברור לכן R חוג.

ניקח $f=\frac{1}{2}$ $g=\sin(4\pi x)$

$g\circ f=0$ אבל $f,g\neq 0$

לכן R לא תחום.

5 ג) המשך

$R=(C[0,1],+,\cdot)$

סגירות - ראינו בתרגול, אסוציאטיביות - מתקיים, יחידה, הופכי לחיבור

ראינו ש f רציפה ← $-f$ רציפה.

ניקח

$$f=\begin{cases} 0 & x\geq\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}-x & \text{else}\end{cases} \qquad g=\begin{cases} 0 & x\leq\frac{1}{2} \\ x-\frac{1}{2} & \text{else}\end{cases}$$

$fg=0$ אבל $f,g\neq 0$ לכן R לא תחום.

6) R חוג בלי יחידה.

א) נראה שכל חוג בוליאני הוא מאפיין 2:

$$\underline{\underline{a+a}}=(a+a)^2=a^2+a^2+a^2+a^2=\underline{\underline{a+a}}+\underline{\underline{a+a}}$$

לכן $a+a=0$

$$\underline{\underline{x+y}}=(x+y)^2=x^2+xy+yx+y^2=\underline{\underline{x+y}}+xy+yx$$

$$xy+yx=0$$

לכן

$$xy+(xy+yx)=xy$$

החוג מאפיין 2 לכן

$$xy=yx$$

ב) נניח $a^3=a$ לכל $a\in R$

(1) $ab=0\Rightarrow ba=0$, כי $ba=(ba)^3=b(ab)^2a=0$

(2) $c^2=c \Rightarrow c\in Z(R)$ כי,

$$c(x-cx)=0\overset{(1)}{\Rightarrow}(x-cx)c=0\Rightarrow \underline{\underline{xc}}=cxc$$

$$(x-xc)c=0\overset{(1)}{\Rightarrow}c(x-xc)=0\Rightarrow \underline{\underline{cx}}=cxc$$

(3) $x^2\in Z(R)$, כי אם נקח $x^4=c^2=c=x^2$ ב (2)

(4) $c^2=2c \Rightarrow c\in Z(R)$, $c=c^3=2c^2$, c^2 מרכזי לכן גם $2c^2$

(5) $x+x^2\in Z(R)$, נקח $c=x+x^2$ ב (4) , $(x+x^2)^2=2(x+x^2)$

(6) לפי (3) , (5) נקבל ש $x=(x+x^2)-x^2$ מרכזי.