קבלת החלטות עם הסתברות

חזרה בסיסית על הסתברות

Ω	מרחב מדגם, תוצאה של ניסוי
מאורע	קבוצה חלקית של Ω
S	מרחב מאורעות, סט מאורעות

יש שני סוגי הסתברויות:

1. הסתברות מבוססת דגימה: אפשר לדגום ומתוך המדגם לחשב את ההתסברות. למשל הטלת מטבע - אפשר לחזור על הניסוי שוב ושוב ו"לוודא"(Validation) את ההתסברות
2. הסתברות סובייקטיבית - למשל סיכוי 0.00001% שבשנה הקרובה ינחתו חייזרים על כדור הארץ. אי אפשר לוודא את זה - אי אפשר לחזור על השנה שוב ושוב ולוודא שב0.00001% מהחזרות נחתו חייזרים.
   - המספר הזה בדרך כלל ניתן ע"י מומחה, ומומחים שונים יכולים לתת מספרים שונים.
   - למרות שרבים מאיתנו נוטים לא להשתמש בהסתברות הסובייקטיבית, זהו סוג ההסתברות היותר נפוץ.
   - בדרך כלל קשה לנו להתמודד עם מספרים קטנים. היחס שלנו למספר 0.00001% יהיה אותו יחס כמו למספר 0.000000001%, למרות שמדובר בסדרי גודל שונים

גם הסתברויות מבוססות דגימה יכולות להיות לא מדוייקות:

- מתי שהדגימה שלנו לא מבוססת על מדגם מייצג
- אם היא לא מביאה בחשבון מגמות(או למשל הדגימה מבוססת על מגמה מסויימת שכבר השתנתה)

גם הסתברויות סובייקטיביות יכולות להיות מבוססות על מודל:

- למשל בחיזוי תוצאות של משחק כדורגל אפשר לנתח את המשחק של כל שחקן ולבנות מודל אגרגטיבי של ביצועי הקבוצה
- גם בהשקעה במניות יש כל מיני מודלים

מדד ההסתברות

מוגדר על (Ω, S) תחת התנאים:

- $P(\alpha) >= 0$ לכל α בS
- $P(\Omega) = 1$
- אם α, β זרים אזי $P(\alpha \cup \beta) = P(\alpha) + P(\beta)$

באופן בלי פורמלי, הסתברות היא מדד אי וודאות על מאורע. 1 זה וודאי, 0 זה וודאות שלא יקרה.

נשים ♡: בהימורים כשנותנים סיכוי של $4:1$ הכוונה שפי 4 יותר סביר שהאירוע יקרה מאשר שלא יקרה, כלומר 20% ולא 25%)

<u>**הסיכוי שהאירוע יקרה לעולם לא יהיה גדול מ**100%</u>

מאורע משלים

ההסתברות למאורע משלים היא $P\left(\overline{X}\right)=1-P\left(X\right)$

דוגמה לשימוש

מה ההסתברות שהמינימום של מדגם בגודל N יהיה קטן מ-x?

- חישוב ישיר - מחשבים מה הסיכוי שלפחות ערך אחד קטן מ-x:

$$\sum_{i=1}^{N}\binom{N}{i}P\left(X<x\right)^{i}P\left(X\geq x\right)^{N-1}$$

- חישוב דרך מאורע משלים - המאורע המשלים הוא שהמינימום גדול או שווה מ-x, כלומר שכל האיברים גדולים או שווים ל-x:

$$1-P\left(X\geq x\right)^{N}$$

הסתברות מותנית

$P\left(F|H\right)$ אחוז המקרים מתוך סך המקרים שבהם H נכון שבהם גם F נכון.

$$p\left(F|H\right)=\frac{p\left(F\cap H\right)}{p\left(H\right)}=\frac{p\left(F,H\right)}{p\left(H\right)}$$

חישוב הסתברות מתוך מאורעות

$$P\left(A\right)=\sum P\left(B_{i}\right)P\left(A|B_{i}\right)$$

הסתברות משותפת

ההסתברות המשותפת מכמתת את ההסתברות להיקרות מספר מאורעות בו זמנית:

$$P\left(X=x,Y=y\right)=P\left(x,y\right)$$

אחת הדרכים לחישוב:

$$P\left(X\text{ and }Y\right)=P\left(X\right)P\left(Y|X\right)$$

חוק השרשרת

$$P\left(x,y,z\right)=P\left(x\right)P\left(y|x\right)P\left(z|x,y\right)=P\left(z\right)P\left(y|z\right)P\left(x|x,z\right)$$

מקליד: עידן אריה
מרצה: פרופ' דוד סרנה
תאריך: 2015-10-25

קבלת החלטות בסביבה דינמית משתנה
89-514-01

נוסחת בייס

יש לנו היפותזה(אמונה) H, שיכולה להיות נכונה או לא נכונה. בתור בני אדם, יש לנו הערכה לא ודאית לגבי נכונות H - $P\left(H\right)$. אם נותנים לנו מידע נוסף - E(Evidence) - אנחנו יכולים לעדכן את $P\left(H|E\right)$. אבל בחיים האמיתיים, יותר קל לנו להעריך את $P\left(E|H\right)$. חוק בייס עוזר לנו לחשב את $P\left(H|E\right)$ מתוך $P\left(E|H\right)$:

$$P\left(B_k|A\right) = \frac{P\left(A|B_k\right)P\left(B_k\right)}{\sum\limits_i P\left(A|B_i\right)P\left(B_i\right)}$$

חשוב לא לבלבל בין $P\left(H|E\right)$ לבין $P\left(E|H\right)$

לדוגמה - 0.001 מהאוכלוסיה סובלת מפגם מולד בלב. הבדיקה מדוייקת ב100% לאנשים שיש להם את הפגם ומדוייקת ב95% עבור אלו שאין להם את הפגם. אם בודקים אקראית אדם ומוצאים שהבדיקה חיובית, לכאורה נראה שיש סיכוי מאוד גבוה שיש לו את הפגם, אבל אם A זה המאורע שלאדם יש את הפגם וB המאורע שתוצאות הבדיקה חיובית:

$$P\left(A|B\right) = \frac{P\left(B|A\right)P\left(A\right)}{P\left(B\right)} = \frac{P\left(B|A\right)P\left(A\right)}{P\left(B|\text{not }A\right)P\left(\text{not }A\right)}$$

$$P\left(A|B\right) = \frac{0.001}{0.001 + 0.05 \cdot 0.999} = 0.01963$$