אלגברה מופשטת - תרגיל 1 (88-211)

תאריך הגשה: 10.08.2011

ההגשה היא בתרגול בלבד!

אין דחייה בהגשה!

- על התרגיל יש לרשום: שם, תעודת זהות, שם המתרגל.
- יש להגיש את התרגיל **ללא** ניילוניות ו/או קלסרים! אלא בקובץ דפים מהודק מצד ימין!

שאלה 1

בדקו האם קבוצת המספרים הממשיים $\mathbb{R}$ מהווה חבורה למחצה לגבי הפעולות הבינאריות הבאות:

א) $a*b=a^2+ab$

ב) $a*b=\sqrt{a+b}$

ג) $a*b=(a^2+b^2)/2$

שאלה 2

בדקו עבור כל אחת מהקבוצות הבאות עם הפעולות הנתונות האם היא: חבורה למחצה/ מונואיד/ חבורה. כמו כן, בדקו האם הפעולה היא קומוטטיבית.

א. $(\mathbb{Z},\bullet)$ כאשר $a\bullet b=a+b+2$

ב. $(\mathbb{Z}_4,\cdot)$

ג. $(\mathbb{Z},-)$

ד. $(Map(\mathbb{N},\mathbb{N}),\circ)$ כאשר $Map(\mathbb{N},\mathbb{N})=\{f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\}$

ה. $(P(X),\Delta)$, באשר X קבוצה כלשהי ו-Δ ההפרש הסימטרי המוגדר ע"י $A\Delta B=(A\bigcup B)\setminus(A\cap B)$ לכל $A,B\in P(X)$.

שאלה 3

א. תהי $A=\{0,1,2,3,4,5,6\}$. על המכפלה הקרטזית $A\times A=\{(a,b)\mid a,b\in A\}$ נגדיר פעולה בינרית ע"י $(a,b)*(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$, כאשר הפעולות באגף ימין הן חיבור וכפל מודולו 7.

(i) הוכיחו ש- $A\times A$ מונואיד קומוטטיבי.

(ii) האם כל איבר ב $A\times A$, פרט ל $(0,0)$, הוא הפיך ?

ב. אותה שאלה כמו בא', כאשר $A=\{0,1,2,3,4\}$ והפעולות הן מודולו 5.

(i) הוכח ש $A\times A$ מונואיד קומוטטיבי.

(ii) האם כל איבר ב $A\times A$, פרט ל $(0,0)$, הוא הפיך ?

<u>שאלה 4</u>

האם $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a,b\in R, a^2+b^2>0\right\}$ היא חבורה למחצה, מונואיד או חבורה (ביחס לפעולת כפל מטריצות)?

<u>שאלה 5</u>

א) תהי $G=\left\{\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid A,B,C\in\mathbb{R}\right\}$. הוכיחו ש- G היא חבורה ביחס לכפל מטריצות (חבורה זו נקראת **Heisenberg group**). האם היא אבלית?

ב) תהיינה $(H,*),(G,\cdot)$ חבורות. נגדיר פעולה + על המכפלה הקרטזית G × H כדלהלן:

$(g_1,h_1) + (g_2,h_2) = (g_1\cdot g_2,h_1*h_2)$

הוכיחו כי G × H היא חבורה תחת פעולה זו.

<u>שאלה 6</u>

א) תהי G חבורה סופית, a,b ∈ G. הוכיחו: |ab| = |ba|

(רמז: אם |ab|=n, |ba|=m , הסתכלו על $(ba)^{n+1}$ ועל $(ab)^{m+1}$).

ב) תהי G חבורה, $g\in G$, $|g|=n$. הוכיחו ש- $g^a=g^b$ אמ"מ $a\equiv b\left(\mathrm{mod}\, n\right)$.

<u>שאלה 7</u>

א. נגדיר $G=\left\{\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a,b,c\in\mathbb{Z}_3\right\}$. הוכיחו כי G חבורה ביחס לפעולת כפל מטריצות, מצאו את הסדר של G ואת הסדר של כל איבר ב G.

ב. תהי G חבורה. אם לכל $a,b\in G$ מתקיים $(ab)^3=a^3b^3$ האם G אבלית?

<u>שאלה 8</u>

הוכיחו ש:

א) b מחלק את a אמ"מ $a\mathbb{Z}$ היא ת"ח של $b\mathbb{Z}$.

ב) $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}=(a,b)\mathbb{Z}$

ג) $a\mathbb{Z}\cap b\mathbb{Z}=[a,b]\mathbb{Z}$.

<u>שאלה 9</u>

א) מצאו את הספרה האחרונה של המספר 63^{63}.

ב) מצאו את הסדר של $35\in(\mathbb{Z}_{75},+)$.

<u>שאלה 10</u>

אילו מתת-החבורות הציקליות הבאות הן סופיות (במקרה זה מצאו את מספר האיברים) ואילו מהן אינסופיות:

א) $\left\langle a=cis18^{\circ}\right\rangle$ ב- $(\mathbb{C}^{*},\cdot)$ (רמז: האם קיים n כך ש- $a^n = 1$?)

ב) $\langle a=1+i\rangle$ ב- $(\mathbb{C}^{*},\cdot)$

ג) $\left\langle\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\right\rangle$ ב- $(GL_2(\mathbb{R}),\cdot)$

בהצלחה!