אינפי 3, תרגול 12

15 בינואר 2014

החלפת משתנים באינטגרל הכפול, חישוב שטח ונפח עם אינטגרל כפול

מטרה:

להחליף מערכת קואורדינטות, כדי שחישוב האינטגרל יתאפשר בצורה ישירה ־ מלבן/תחום נורמלי.

דוגמאות:

חשבו את האינטגרל $\iint_D \frac{x+3y}{x^4}e^{y/x^3}dxdy$ כאשר $D=\left\{(x,y)\mid x^3\le y\le 4x^3, \frac{1}{2}\le x+y\le 1\right\}$.

תשובות:

1. התחום D מוגדר כולו ברביע הI. כי אם $x=0$ אז: $\frac{x,y>0}{0^3\le y\le 4\cdot 0^3}$ $\Leftarrow$ $y=0$ ואז $1\not\le 0+0=x+y\not\le 1/2$ ולא יתכן $x<0$ כי אז $x^3>4x^3$ בניגוד לדרישה!
נגדיר החלפת משתנים:

$$\begin{cases} u(x,y)=x+y \\ v(x,y)=\frac{y}{x^3} \end{cases}$$

התחום D במישור $u-v$ הופך להיות מלבן $\Delta=\left\{(u,v)\mid 1/2\le u\le 1, 1\le v\le u\right\}$.
האינטגרל לאחר החלפת משתנים:

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D f(x(u,v),y(u,v))\cdot|J|dudv \overset{(\frown)}{=}$$

היעקוביאן של ההעתקה $\begin{cases} x(u,v)=x \\ y(u,v)=y \end{cases}$:

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

אם $J\neq 0$ בסביבת נק' מסוימת:

$$J^\star=\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

היעקוביאן של ההעתקה ההפוכה מקיים:

$$\boxed{J \cdot J^{\star} = 1}$$

ונעשה את החלפת המשתנים:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{-3y}{x^4} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{x^3} \end{aligned}$$

נתחיל מהחישוב של $J^{\star}$ (נתון $(x,y) \mapsto (u,v)$):דק

$$J^{\star} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{3y}{x^4} \\ 1 & {}^{1}/{x^3} \end{vmatrix} = \frac{1}{x^3} + \frac{3y}{x^4} = \frac{x+3y}{x^4} \Rightarrow J = \frac{1}{J^{\star}} = \frac{x^4}{x+3y} > 0, \quad x, y > 0$$

האינטגרל שלנו לאחר ההחלפה:

$$\overset{(\frown)}{=} \iint_{\Delta} \frac{x+3y}{x^4} \cdot e^v \cdot \frac{x^4}{x+3y} dudv \underset{\text{fubini}}{=} \int_{0.5}^{1} du \cdot \int_{1}^{4} e^v dv = \frac{e^4 - e}{2}$$

החלפת משתנים פולארית (קוטבית):

אם התחום D במישור $x - y$ הוא תחום עיגולי (עיגול, גזרת עיגול, טבעת) ו/או הפונקציה בתוך האינטגרל תלויה ב$x^2 + y^2$ בלבד, מנסים החלפת משתנים פולרית:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} r \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta = \frac{y}{x} \end{cases} x \neq 0$$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ או תחום חלקי. כאן ידוע ש$\boxed{J = r > 0}$.

דוגמה:

לחשב את $K = \iint_D \arctan\left(\frac{y}{x}\right) dxdy$ כאשר $x > 0$, $D = \left\{(x,y) \mid 9 \leq x^2+y^2 \leq 16, \quad x \leq y \leq \sqrt{3}x\right\}$
בין שני ישרים חסום בין שני מעגלים ברדיסים 3,4 (טבעת). תחום עיגולי ־ החלפה פולרית.
התחום D עובר ל־$\Delta = \{(r,\theta) \mid 3 \leq r \leq 4, {}^{\pi}/_{4} \leq \theta \leq {}^{\pi}/_{3}\}$. נימוק:

$$\begin{aligned} 9 &\leq x^2+y^2 \leq 16 \\ r > 0 \quad 3 &\leq r \leq 4 \\ \tan\theta_{\min} = 1 \Rightarrow \quad \theta_{\min} &= \frac{\pi}{4} \quad \text{that's the incline of y=x} \\ \tan\theta_{\max} = \sqrt{3} \Rightarrow \quad \theta_{max} &= {}^{\pi}/_{3} \quad \text{thats the incline of y=}\sqrt{3}x \end{aligned}$$

האינטגרל במישור $r - \theta$:

$$k = \iint_{\Delta} \theta \cdot rdrd\theta = \int_3^4 rdr \int_{0.25\pi}^{\pi/3} \theta d\theta = \frac{49}{576}\pi^2$$

שטח/נפח עם אינטגרל כפול:

אם D תחום במישור בעל שטח S, אז: $S = \iint_D 1dxdy$.

דוגמה:

לחשב שטח התחום המוגדל ע"י הלמניסקטה:

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2), a>0 \qquad (\star)$$

תשובה:

התחום הנ"ל סימטרי ביחס לצירים x, y כי אם נחליף את x ב$-x$ ואת y ב$-y$, המשוואה המגדירה את התחום לא משתנה, לכן מספיק לחשב את השטח ברביע הI ולכפול פי 4.
נעבור לקורדינטות פולאריות:

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= r^2 \\ x^2-y^2 &= r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = r^2\cos 2\theta \end{aligned}$$

נציב זאת לתוך $(\star)$:

$$\begin{aligned} r^4 &= (r^2)^2 = a^2(a^2\cos 2\theta) / : r^2 > 0 \\ \Rightarrow r^2 &= a^2\cos 2\theta \end{aligned}$$

כיוון וכל הרכיבים גדולים מ0:

$$\begin{aligned} 0 &\leq 2\theta \leq {}^{\pi}/_{2} \\ 0 &\leq \theta \leq {}^{\pi}/_{4} \\ 0 &< r \leq a\sqrt{\cos 2\theta} \end{aligned}$$

השטח הוא:

$$S = \iint_D dxdy = 4\int_0^{\pi/4} d\theta \underbrace{\left(\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} rdr\right)}_{=|J|=\frac{r^2}{2}|_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}}=\frac{a^2}{2}\cos(2\theta)} = 2a^2 \cdot \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta = a^2$$

החלפה גלילית בתלת מימד (אינטגרל משולש)

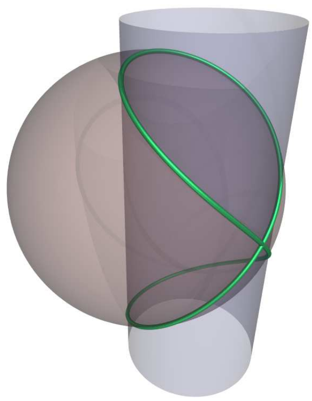
נפח של גוף V תלת מימדי הוא:

$$|V| = \iiint_V 1dxdydz$$

החלפה גלילית, אם יש בשאלה גליל או חרוט שהוא גליל עם בסיס אחד נקודתי (גם אם בנוסף יש כדור, הגליל הגליל מנצח!)

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z \end{cases} \qquad J = r, r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

דוגמה: לחשב נפח של הגליל $a > 0$, $x^2 + y^2 = ax$ או בהשלמה לריבוע $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ החסום מלמעלה ולמלטה ע"י $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. זה נקרא Viviani Curve.



הגוף סימטרי ביחס למישור $x - y$. אם נחליף את y ב־$-y$ המשוואות לא משתנות. גם ביחס למישור $x - z$ ($y = 0$). נעבור לגליליות ונחשב הנפח עבור $0 < \theta < \pi/2$ ונכפול ב4. המשוואה $x^2 + y^2 = ax$ בקורדינטות גליליות עוברת ל$r = a\cos\theta$, $\cos\theta > 0, 0 \leq r \leq a\cos\theta, 0 \leq \theta \leq \pi/2$. z מוגבל ע"י הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

$$\Rightarrow z^2 = a^2 - r^2 \Rightarrow 0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - r^2}$$

$$\Rightarrow \iiint_V dxdydz = 4\int_0^{0.5\pi} d\theta \int_0^{a\cos\theta} rdr \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} dz = \frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)$$

טיפים:

- יש שאלות תאורטיות. הוכחות לא רק ממשפטי הכיתה. צריך להסתכל במבחנים שלו משנים קדומות ובערך 60% זה טכני.