אינפי 3, תרגול 8

9 בדצמבר 2013

נקודות קיצון של כמה משתנים

1. **קיצון מקומי** תהי $w = f(x_1, \ldots, x_n)$ פונקציה המוגדרת בסביבה של נקודה $P_0(x_1^0, \ldots x_n^0)$ ב־$\mathbb{R}^n$. ל־f יש מקס (מינ') מקומי ב־P_0 אם יש סיבהב של P_0 שבה לכל נק' M בסביבה הנ"ל

$$\begin{array}{lccc} (\max) & f(M) & \leq & f(P_0) \\ (\min) & f(M) & \geq & f(P_0) \end{array}$$

תנאי הכרחי לקיצון: אם ל־f כל הנגזרות החלקיות מסדר 1 וP_0 נק' קיצון מקומית אז $\vec{\nabla} f(P_0) = \vec{0}$ (כל הנגזרות החלקיות הראשונות שוות 0). **חשודות לקיצון :** הנק' הסטציונרית שבהן כל הנגזרות החלקיות קיימות ושוות ל־0 או הנק' שבהן יש נגזרת חלקית אחת לפחות שאינה קיימת.

דוגמה 1:

תהי $f(x,y) = x^2 - 2x + \sqrt[3]{y^2}$. למצוא את כל הנקודות החשודות לקיצון ולסווגן.

פתרון:

לפי x: $f_x(x,y) = 2x - 2$. לפי y: $y \neq 0 \quad f_y(x,y) = \frac{2}{3\sqrt[3]{y}}$.

$$f\prime_x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

עבור $y \neq 0$ ברו כי $f\prime_y \neq 0$ אבל בנקודות בהן $y = 0$, f'_y לא קיימת. חייבים לוודא זאת לפי הגדרת הנגזרת החלקית:

$$f'_y(x,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, \Delta y) - f(x,0)}{\Delta y} = \ldots$$

בסופו של דבר, הנקודה שבה התנאים נפגשים היא $(1,0)$ והיא החשודה היחידה כקיצון מקומי. נשים לב כי $f(x,y) = x^2 - 2x + 1 - 1 + \sqrt[3]{y^2} = \underbrace{(x-1)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\sqrt[3]{y^2}}_{\geq 0} - 1 = f(1,0)$ לכל $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. הנקודה $(1,0)$ היא נקודת $\min$ גם מקומית אבל גם מוחלטת של $f(x,y)$ (כי האי"ש נכון לכל $(x,y) \in \mathbb{R}^2$).

משפט (תנאי מספיק למקס' ומינ' של פונ' ב2 משתנים):

תהי $f(x,y) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ בסביבת הנק' הסטציונרית $P(x_0,y_0)$. נסמן

$$\begin{aligned} A &= f_{xx}(x_0,y_0) \\ B &= f_{xy}(x_0,y_0) \\ C &= f_{yy}(x_0,y_0) \end{aligned}$$

ונגדיר:צ

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$$

בנקודה (x_0,y_0).

1. אם $\Delta > 0$ אז יש לf קיצון בנקודה P. אם A>0 זה מינימום ואם A<0 זהו מקסימום. (לא יכול להיות ש$\Delta > 0$ ו$A=0$ כי אז $\Delta = -B^2 < 0$).
2. אם $\Delta = 0$ אי אפשר לדעת לפי המשפט (חייבים להפעיל הגדרה!)
3. אם $\Delta < 0$ אין בנקודה הנ"ל קיצון אלא <u>אוכף</u> (פיתול מרחבי).

דוגמה 2

לחקור נקודות קיצון של הפונקציה $z = f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 + 2xy - y^2$.

פתרון: זהו פולינום בx, y ולכן הפו' גזירה ברציפות מכל סדר ב$\mathbb{R}^2$ [$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$], לכן הנקודות החשודות שיהיו (אם יהיו) הן סטציונריות בלבד. נקבל:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 4x^3 - 2x + 2y &= 0 \\ f'_y(x,y) = 4y^3 + 2x - 2y &= 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4(x^3+y^3) = 0 \Rightarrow \boxed{y=-x}$$

$$\begin{aligned} 4x^3 - 3x &= 0 \Rightarrow 4x(x^2-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_{2,3} = \pm 1 \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad y = 0, y_{2,3} = \mp 1 \end{aligned}$$

$$M(0,0), N(1,-1), K(-1,1)$$

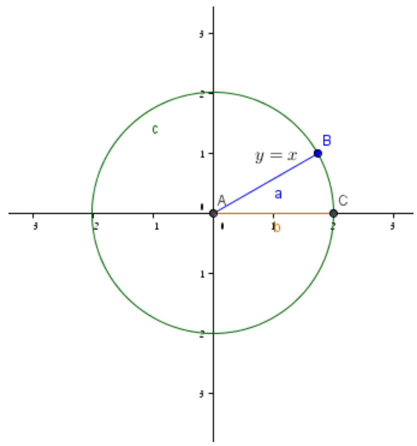
נגזרות חלקיות מסדר 2:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 12x^2 - 2 \\ f_{xy}(x,y) &= 2 \\ f_{yy}(x,y) &= 12y^2 - 2 \end{aligned}$$

בנקודות N, K:

$$\begin{aligned} A &= 10 > 0, B = 2, C = 10 > 0 \\ \Delta &= AC - B^2 = 100 - 4 > 0 \end{aligned}$$

⇐יש קיצון וגם $A>0$ ולכן שתי הנקודות הן מינימום מקומי.
לגבי $M(0,0)$: $A=C=-2, B=2, \Delta=AC-B^2=0$ והמשפט לא נותן מידע. $z=x^4+y^4-(x-y)^2$. נפעל לפי הגדרה: ניקח סביבה כלשהי של $(0,0)$. הערך $f(0,0)=0$. במסלול $y=x\to 0$. במסלול זה $f(x,x)=2x^4>0$ פרט ל$(0,0)$ עמה. כעת נציב מסלול $y\to 0, y=0$: $f(x,0)=x^4-x^2=x^2(x^2-1)$ ואז $f(x,0)<0=f(0,0)$.
שרטוט:



לכן, בכל סביבה של $M(0,0)$ יש נקודות בהן ערכי f גדולים מ$f(0,0)$ ונקודות אחרות בהן ערכי f קטנים מ$f(0,0)$ ולכן M איננה נקודת קיצון אלא אוכף. לסיכום N,K נקודות min מקומי וM נקודת אוכף.

תנאי סילבסטר ־ליותר משני משתנים

תנאי סילבסטר: תבנית ריבועית $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}h_ih_j = A(h_1,\ldots h_n)$ ו$a_{ij}=a_{ji}$. תבנית ריבועית תהיה חיובית לחלוטין ⇔: $a_{11}>0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}>0,\ldots,\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ & \vdots & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}>0$. התבנית שלילית לחלוטין ⇔ $a_{11}<0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}<0,\ldots$ כלומר כל מינור מסדר אי זוגי שלילי ומסדר זוגי חיובי.
תנאי מספיק לקיצון ב־n משתנים: תהי $w=f(x_1,\ldots,x_n)$ שייכת לC^2 בסביבת נקודה סטציונרית P_0 ונסמן $a_{ij}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)(P_0)$ ונתון דיפר' שני: $d^2f(P_0)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta x_i \Delta x_j$.
אם $d^2f(P_0)$ תבנית חיובית לחלוטין אז ב־P_0 יש min מקומי ואם היא שלילית לחלוטין max מקומי.

דוגמה:

לחקור נק' קיצון של $w = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z$.

תשובה: פולינום, לכן תשובות הן סטציונריות בלבד. $w'_x = 2x - 2, w'_y = 2y - 4, w'_z = 2z + 6$ $\Leftarrow$ $(1, 2, -3)$ היא הסטציונרית החשובה היחידה. $w_{xx} = 2, w_{xy} = 0, w_{yz} = 0, w_{zz} = 2$ ולכן:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} > 0, 2 > 0$$

חיובי לחלוטין ולכן ישנו מינימום מקומי.

משפט (תנאי מספיק מורחב): אם הפונקציה $w = f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ בסביבת נקודה סטציונרית P_0 ונניח כי $df(P_0) = 0; d^2 f(P_0) = 0, \dots, d^{n-1} f(P_0) = 0, d^n f(P_0) \neq 0$.

א. אם n הוא אי זוגי אז P נקודת קיצון

ב. אם n זוגי ו-$d^n(P_0) > 0$, P_0 היא min מקומי. אם $d^n(P_0) < 0$ אז P_0 היא max מקומי.

דוגמה 5:

תהי $f(x, y) \in C^4$ בסביבת הנקודה $P_0(2, 2)$. נתון פיתוח הטיילור שלה סביב P_0:

$$f(x, y) = 1 + 8(x-2)^2 + 12(x-2)(y-2) + 7(x-2)^2 + 4(x-2)(y-2)^2 + 14(y-2)^3 + R_3$$

לחקור לקיצון את $P_0(2, 2)$.

תשובה:

$$\begin{aligned} df(P_0) &= 0 \Leftarrow df(P) = f_x(P) \overset{(x-2)}{\Delta x} + f_y(P) \overset{(y-2)}{\Delta y} \\ d^2 f(P) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^2 f \end{aligned}$$

לכן $A = 8, B = 6, C = 7$.

$$\Delta = AC - B^2 = 56 - 36 > 0, A = 8 > 0$$