אינפי 1 החממה ־ תרגול 2

26 באוקטובר 2020

1 גבולות של סדרות

הגדרות:

- סדרה היא פונקציה $f : \mathbb{N} \to A$, עבור קבוצה כלשהי A. אצלנו נדבר על $A = \mathbb{R}$. נסמן: $f(n) = a_n$, כלומר, הסדרה $f(1), f(2), f(3), \ldots$ מסומנת ב־$a_1, a_2, a_3, \ldots$, או באופן כללי יותר

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

- תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה. נאמר שהיא מתכנסת לגבול $L \in \mathbb{R}$, ונסמן $a_n \to L$ או $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ אם מתקיים:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n > N_0 : |a_n - L| < \epsilon$$

- דוגמא פשוטה: $a_n = 9$. סדרה קבועה. ברור שלכל אפסילון, כבר החל מ־$N_0 = 1$ אז לכל $n > N_0$ מתקיים: $|a_n - 9| = |9 - 9| = 0 < \epsilon$.

לדוגמא: נצייר את איברי הסדרה $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$. ראינו בציור איך לאט לאט האיברים מתקרבים ל־1, נוכיח שזהו אכן הגבול (נוכיח $a_n \to 1$):
יהי $\epsilon > 0$. צריך למצוא N_0 כך שלכל $n > N_0$ מתקיים:

$$|a_n - 1| < \epsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\left|1+\frac{(-1)^n}{n}-1\right|<\epsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|<\epsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{n}<\epsilon$$

ולכן אם ניקח $N_0=\lceil\frac{1}{\epsilon}\rceil$ אז לכל $n>N_0$ נקבל $\frac{1}{n}<\epsilon$ ולפי לעיל נקבל $|a_n-1|<\epsilon$.

תרגילים:

1. מצאו את גבול הסדרה $a_n=\frac{n-1}{n}$, והוכיחו שזהו אכן הגבול.

פתרון: זה נראה שהגבול הוא 1, נוכיח זאת: יהי $\epsilon>0$, צריך למצוא N_0 כך שלכל $n>N_0$ מתקיים:

$$|a_n-1|<\epsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\left|\frac{n-1}{n}-1\right|<\epsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\left|\frac{-1}{n}\right|<\epsilon \iff \frac{1}{n}<\epsilon \iff \frac{1}{\epsilon}<n$$

כלומר, אם ניקח $N_0=\lceil\frac{1}{\epsilon}\rceil$ אז לכל $n>N_0$ נקבל

$$n>N_0\geq\frac{1}{\epsilon}$$

$$\Updownarrow$$

$$|a_n-1|<\epsilon$$

כדרוש.

2. הוכיחו: $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n-1}{3n^2+2n+1}=\frac{1}{3}$.

פתרון: יהי $\epsilon>0$. צריך למצוא N_0 כך שלכל $n>N_0$ מתקיים:

$$|a_n-\frac{1}{3}|<\epsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\left|\frac{n^2-n-1}{3n^2+2n+1}-\frac{1}{3}\right|<\epsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\left|\frac{3n^2-3n-3-3n^2-2n-1}{3(3n^2+2n+1)}\right|<\epsilon$$

נשים לב:

$$\left|\frac{-5n-4}{3(3n^2+2n+1)}\right|=\left|\frac{5n+4}{3(3n^2+2n+1)}\right|\le\frac{9n+9}{9n^2+6n+3}\le\frac{9(n+1)}{9n^2}=\frac{n+1}{n^2}\le\frac{2n}{n^2}=\frac{2}{n}$$

נבחר $N_0=\lceil\frac{2}{\epsilon}\rceil$. ואז באמת אם $n>N_0$ נקבל ע"פ קילוף אחורה $|a_n-\frac{1}{3}|<\epsilon$.

3. תהי $\{a_n\}\subseteq\mathbb{R}^+$ כך שקיים $L\in[0,\infty)$ עבורו $a_n\to L$. הוכיחו: $\sqrt{a_n}\to\sqrt{L}$.

פתרון: ראשית, הסדרה החדשה $\sqrt{a_n}$ מוגדרת כי $a_n>0$. נחלק למקרים:

(א) אם $L>0$. רוצים להוכיח $\sqrt{a_n}\to\sqrt{L}$. יהי $\epsilon>0$. צריך למצוא N_0 כך שלכל $n>N_0$ מתקיים:

$$\left|\sqrt{a_n}-\sqrt{L}\right|<\epsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\left|(\sqrt{a_n}-\sqrt{L})\frac{\sqrt{a_n}+\sqrt{L}}{\sqrt{a_n}+\sqrt{L}}\right|=\left|\frac{a_n-L}{\sqrt{a_n}+\sqrt{L}}\right|<\epsilon$$

נשים לב שמתקיים: $\left|\frac{a_n-L}{\sqrt{a_n}+\sqrt{L}}\right|\le\left|\frac{a_n-L}{\sqrt{L}}\right|$, ולכן אם נמצא N_0 כך שלכל $n>N_0$ מתקיים: $\left|\frac{a_n-L}{\sqrt{L}}\right|<\epsilon$ אז סיימנו. ואכן:

$$\left|\frac{a_n-L}{\sqrt{L}}\right|<\epsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$|a_n - L| < \sqrt{L}\epsilon$$

נתון $L \to a_n$, ולכן לכל ϵ' ובפרט עבור $\epsilon' = \sqrt{L}\epsilon > 0$ קיים N_0 כך שלכל $n > N_0$ מתקיים: $|a_n - L| < \epsilon' = \sqrt{L}\epsilon$. N_0זה עושה את העבודה כי קיבלנו שלכל $n > N_0$ מתקיים:

$$|a_n - L| < \sqrt{L}\epsilon \iff \left|\sqrt{a_n} - \sqrt{L}\right| < \epsilon$$

(ב) עבור $L = 0$. יהי $\epsilon > 0$ צריך למצוא N_0 כך שהחל ממנו

$$|\sqrt{a_n}| < \epsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$a_n < \epsilon^2$$

כיון ש־ $a_n \to 0$, לכן לכל ϵ', ובפרט עבור $\epsilon' = \epsilon^2$, ידוע שיש N_0 שהחל ממנו $a_n < \epsilon^2$, ואז נקבל הדרוש.

4. הראו שהסדרות הבאות לא מתכנסות:

(א) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$

(ב) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n = 2k \\ 1 + \frac{1}{n} & n = 2k-1 \end{cases}$

פתרון: נתבונן בשלילת הגדרת הגבול: L איננו הגבול של הסדרה a_n אם מתקיים:

$$\neg\left(\forall\epsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n > N_0 : |a_n - L| < \epsilon\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists\epsilon > 0, \forall N_0 \in \mathbb{N}, \exists n > N_0 : |a_n - L| \geq \epsilon$$

א. נתחיל מלהראות ש־0 איננו הגבול. צריך למצוא ϵ כך שלכל N_0 יש איזשהו $n > N_0$ עבורו:

$$|a_n| \geq \epsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\left|\frac{1+(-1)^n}{2}\right| \geq \epsilon$$

נשים לב שלכל n זוגי מתקיים:

$$\left|\frac{1+(-1)^n}{2}\right| \geq 1$$

ולכן, נוכל לבחור $\epsilon = 1$ ואז לכל N_0 יש $n = 2N_0 > N_0$ שעבורו אכן

$$\left|\frac{1+(-1)^n}{2}\right| \geq 1$$

נמשיך להראות שלכל $L \neq 0$ הוא לא הגבול. כלומר נמצא $\epsilon > 0$ כך שלכל N_0 יש $n > N_0$ עבורו:

$$|a_n - L| \geq \epsilon$$

נשים לב שאם n אי־זוגי אז

$$|a_n - L| = |L| \geq |L|$$

לכן נבחר $\epsilon = |L|$, ואז לכל N_0 יש $n = 2N_0 + 1$ שעבורו אכן

$$|a_n - L| \geq |L| = \epsilon$$

ב. מדלגים. משחק דומה.

5. תהיינה a_n, b_n סדרות. הוכיחו או הפריכו:

(א) $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < 2b_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$.

הפרכה: $a_n = 1, b_n = 1$. אז אכן $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < 2b_n$ אבל $\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \not< 1 = \lim_{n\to\infty} b_n$.

(ב) $\left(\lim_{n\to\infty} b_n = 0\right) \vee \left(\lim_{n\to\infty} a_n = 0\right) \Leftarrow \lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

הוכחה: נתון ש $a_n b_n \to 0$. יהי $\epsilon > 0$. נמצא N_0 שהחל ממנו $|a_n| < \epsilon \vee |b_n| < \epsilon$. אם זה נכון אז סיימנו. אחרת, נראה שאין מקרה כזה - אבל יש מקרה כזה כדלהלן:

הפרכה: $b_n = 1 - a_n ,a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$, ואז

$$a_n b_n = 0$$

וכמובן שהסדרות כלל לא מתכנסות.

6. הוכיחו: $\sqrt[n]{n} \to 1$.

פתרון: יהי $\epsilon > 0$. צריך למצוא N_0 כך שלכל $n > N_0$ מתקיים:

$$\left|\sqrt[n]{n} - 1\right| < \epsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \epsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$n < (1+\epsilon)^n$$

נשתמש בפיתוח הבינום:

$$(1+\epsilon)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k}\epsilon^k = 1^n + n \cdot 1^{n-1}\epsilon + \binom{n}{2} 1^{n-2}\epsilon^2 + \cdots$$

נשים לב שכל המחוברים כאן חיוביים, ולכן:

$$(1+\epsilon)^n > \binom{n}{2} 1^{n-2}\epsilon^2 = \frac{n(n-1)}{2}\epsilon^2$$

ולכן, אם $n < \frac{n(n-1)}{2}\epsilon^2$, אז גם $n < (1+\epsilon)^n$, וזה מה שרצינו.

$$n < \frac{n(n-1)}{2}\epsilon^2$$

$$\Updownarrow$$

$$n > \frac{2}{\epsilon^2} + 1$$

ולכן נבחר $N_0 = \left\lceil \frac{2}{\epsilon^2} + 1 \right\rceil$, ואז לכל $n > N_0$ נקבל את הנדרש.

7. מצאו את $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, והוכיחו זאת.