פתרון תרגיל בית 4 מבוא לתורת החבורות
88-211 סמסטר א' תשע"ח

שאלה 1. מצאו איבר מסדר 6 בחבורה S_5.

פתרון. האיברים מסדר 6 בחבורה S_5 הם בדיוק התמורות שניתן לרשום כמכפלה של מחזורים זרים מאורך 2 ומאורך 3. למשל התמורה $(345)(12)$.

שאלה 2. תנו דוגמה לחבורה אינסופית שנוצרת סופית. תנו דוגמה שהחבורה גם לא אבלית.

פתרון. כל חבורה ציקלית היא נוצרת סופית, ולכן $\mathbb{Z}$ היא דוגמה אפשרית. מכפלה קרטזית של חבורות נוצרות סופית היא נוצרת סופית, ולכן דוגמה לחבורה לא אבלית ונוצרת סופית היא $\mathbb{Z} \times S_3$.

שאלה 3. תהינה $H, K \leq G$ שתי תת־חבורות של G. הוכיחו או הפריכו:

א. $H \cup K$ היא גם תת־חבורה של G.

ב. HK היא גם תת־חבורה של G, כאשר $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$.

פתרון. א. כמעט כל דוגמה שנבחר תעבוד, כל עוד $K \nsubseteq H$ וגם $H \nsubseteq K$. למשל אם נבחר $G = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, $H = \mathbb{Z}_3 \times \{0\}$ ו-$K = \{0\} \times \mathbb{Z}_3$, נקבל שהאיחוד אינו תת־חבורה. הוא לא תת־חבורה כי הוא לא סגור לפעולה, ובמקרה זה הסדר שלו לא מחלק את סדר החבורה.

ב. אם תת־החבורות לא נורמליות, אז בדרך כלל HK לא תהיה תת־חבורה. לכן חייבים לבחור חבורה לא אבלית. למשל נבחר $G = S_3$, $H = \langle (12) \rangle$ ו-$K = \langle (23) \rangle$. נקבל

$$HK = \{\text{id}, (12), (23), (123)\}$$

וזו לא תת־חבורה מנימוקים דומים לסעיף הקודם.

שאלה 4.

א. הוכיחו כי $(\mathbb{Q},+)$ אינה נוצרת סופית.

פתרון. א. נניח בשלילה ש-$\mathbb{Q}$ נוצרת סופית. לכן ישנה קבוצת איברים סופית כך שמתקיים

$$H = \left\langle \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n} \right\rangle = \mathbb{Q}$$

ואפשר להניח כי $\frac{a_i}{b_i}$ הוא שבר מצומצם. כל איבר $q \in H$ אפשר להציג בצורה

$$q = k_1\frac{a_1}{b_1} + k_2\frac{a_2}{b_2} + \cdots + k_n\frac{a_n}{b_n}$$

עבור $k_i \in \mathbb{Z}$, על פי מה שראינו בתרגול. בעזרת מכנה משותף אפשר להציג כל q כזה בצורה

$$q = \frac{k}{\text{lcm}(b_1, b_2, \dots, b_n)}$$

עבור $k \in \mathbb{Z}$. אבל ישנם איברים ב-$\mathbb{Q}$ שהמכנה שלהם, כשבר מצומצם, גדול מ-$\text{lcm}(b_1, b_2, \dots, b_n)$, כמו

$$\mathbb{Q} \ni \frac{1}{\text{lcm}(b_1, b_2, \dots, b_n) + 1} \notin H$$

כלומר $H \neq \mathbb{Q}$, שזו סתירה. לכן $\mathbb{Q}$ אינה נוצרת סופית.

שאלה 5.

א. הוכיחו: $S_3 = \langle (12), (123) \rangle = \langle (12), (23) \rangle$. (למה אי אפשר למצוא קבוצת יוצרים קטנה יותר?)

ב. מצאו את כל איברי תת־החבורה $K_4 = \langle (12)(34), (13)(24) \rangle \leq S_4$. האם היא איזומורפית ל-$U_{10}$?

פתרון. א. לפי לגרנז', סדר תת־חבורה מחלק את סדר החבורה. לכן הסדרים האפשריים לתת־החבורות הלא טריוויאליות של S_3 הם $2, 3$. כמו כן, הוכחנו שסדר איבר בחבורה מחלק את סדר החבורה.
נראה שתת־החבורה $\langle (123), (12) \rangle$ שווה ל-S_3 כי הסדר של (123) הוא 3 והסדר של (12) הוא 2. כעת, מכיוון שסדר תת־החבורה $\langle (123), (12) \rangle$ מתחלק גם ב-2 וגם ב-3, אז הוא גם מתחלק ב-6. ראינו כי $|S_3| = 6$, ולכן $S_3 = \langle (12), (123) \rangle$ שכן הסדר של תת־חבורה הוא לכל היותר סדר החבורה.
לגבי $\langle (23), (12) \rangle$, נשים לב ש-$(132) = (13)(12)$. כלומר תת־חבורה זו מכילה איבר מסדר 3, ולפי נימוק דומה, נסיק שגם תת־חבורה זו מתלכדת עם החבורה S_3.

ב. תת־החבורה K נוצרת על ידי שני איברים מסדר 2, שמכפלתם גם מסדר 2. לכן האיברים הם

$$K = \{\mathsf{id}, (12)\,(34)\,, (13)\,(24)\,, (14)\,(23)\}$$

החבורה הזו אינה ציקלית, ולכן איזומורפית ל-$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. אבל $U_{10} \cong \mathbb{Z}_4$ היא ציקלית, ולכן לא איזומורפית ל-K.

בהצלחה!