ליכסון

26 באפריל 2017

תזכורת: פ"א (ר"א), ע"ע, ו"ע, מרחב עצמי (ר"ג) .
הגדרה: $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ תקרא לכסינה אם A צמודה למטריצה אלכסונית (כלומר קיים Pהפיכה כך ש $P^{-1}AP = D$ אלכסונית)
דוגמא: עבור $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ ראינו כי $\{\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1\}$ ע"ע
ו $\{v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ ו"ע בהתאמה.
נגדיר $P = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (הו"ע בעמודות P) כעת:

$$\begin{aligned} AP &= A(v_1, v_2) = (Av_1, Av_2) \\ &= (\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2) = (v_1, v_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\ &= P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

כלומר, קיבלנו כי $AP = PD$. כיוון שו"ע אלו בת"ל נקבל ש Pהפיכה ואז בהכפלה ב P^{-1} משמאל נקבל כי

$$P^{-1}AP = D$$

כלומר A לכסינה.
משפט: תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ אזי הבאים שקולים.

- $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה
- יש בסיס של ו"ע ל $\mathbb{F}^n$ (יש n ו"ע בת"ל)
- הפ"א $P_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i}$ (λ_i־ים שונים) מתפרק לגורמים לינארים (מל"ל) + לכל ע"ע ר"ג=ר"א
- הפ"מ $m_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_i)$ (λ_i־ים שונים) מתפרק לגורמים לינארים (מל"ל) ממעלה 1

הערה:

- כאשר A לכסינה - Pמורכבת מו"ע (בת"ל) , D מורכבת מע"ע בהתאמה.

ראינו בתרגיל קודם כי עבור $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. מתקיים כי $f_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2 (\lambda+1)^2$ כלומר מל"ל. ע"ע $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$.
ומתקיים כי ר"א=ר"ג=2 עבור $\lambda_1 = 1$. אך לא עבור $\lambda_2 = -1$ (ר"א=2 ואילו ר"ג =1)
ולכן Aאינה לכסינה.

תרגיל: קבע האם $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$לכסינה כאשר:

1. $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ מטריצה ממשית.
פתרון: $f_A(\lambda) = |\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}| = \lambda^2 + 1$ כיוון של f_A אין שורשים בממשים בפרט אין ל A ו"ע ולכן A אינה לכסינה.

2. $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$מטריצה מרוכבת.
פתרון: $f_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$ השורשים הם $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$ ולכן יש לה $n = 2$ ע"ע שונים ולכן לכסינה לפי תרגיל הבא:

תרגיל: תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ עם n ע"ע שונים $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ אזי A לכסינה.
הוכחה: לכל ע"ע יש ו"ע עצמי. כיוון שו"ע של ע"ע שונים בתל נקבל שיש n ו"ע בת"ל ל A וסיימנו.
תרגיל: האם כל מטריצה $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ לכסינה?
פתרון: לא! למשל $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $f_A(\lambda) = |\begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}| = (\lambda - 1)^2$.
$\lambda = 1$ ע"ע יחיד.
ו"ע: $N(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$ ולכן $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ו"ע יחיד בפרט אין בסיס של ו"ע ל $\mathbb{C}^2$ ולכן A אינה לכסינה.
תרגיל: לאילו ערכי a המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} a & 8 & 8 & 8 \\ & 0 & 8 & 8 \\ & & 1 & 8 \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$

לכסינה?
פתרון: אם $a \neq 0, 1, 2$ אזי יש לה $n = 4$ ע"ע שונים ולכן לכסינה. אם $a = 0$ אזי נקבל כי הר"א שלו הוא 2 ואילו

$$V_0 = N(\begin{pmatrix} 0 & 8 & 8 & 8 \\ & 0 & 8 & 8 \\ & & 1 & 8 \\ & & & 2 \end{pmatrix}) = N(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix})$$

ולכן הר"ג =1 ולכן אינה לכסינה. באותו אופן גם עבור $a = 1, 2$ נקבל כי A אינה לכסינה.

תרגיל: תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה. יהיו $\lambda_1\dots\lambda_n$ הע"ע שלה. הוכח $|A|=\prod_{k=1}^{n}\lambda_k$ וגם $tr(A)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ (כלומר הדטרמיננטה שווה למכפלה הע"ע והעקבה לסכום הע"ע)

פתרון: נתון כי קיימת P כך ש $P^{-1}AP=D$ ובנוסף, למטריצות דוצמודות יש אותה דטרמיננטה ואותה עקבה.

תרגיל: תהא $A=\begin{pmatrix}5&6\\-3&-4\end{pmatrix}$ חשב את A^{2000}. ראינו כי עבור $P=\begin{pmatrix}-2&-1\\1&1\end{pmatrix},\ P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&2\end{pmatrix}$

מתקיים כי $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}$ או לחילופין

$$A=P\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}P^{-1}$$

כעת

$$\begin{aligned}A^{2000}&=\left(P\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}P^{-1}\right)^{2000}\\&=\left(P\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}P^{-1}\right)\cdot\left(P\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}P^{-1}\right)\cdots\left(P\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}P^{-1}\right)\\&=P\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}^{2000}P^{-1}=P\begin{pmatrix}2^{2000}&0\\0&(-1)^{2000}\end{pmatrix}P^{-1}\end{aligned}$$

הערה: דימיון מטריצות $A\sim B$ הוא יחס שקילות. כלומר:

- $A\sim A$
- אם $A\sim B$ אזי $B\sim A$
- אם $A\sim B, B\sim C$ אזי $A\sim C$

תרגיל: הוכח ש $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\7&2&0\\0&\sqrt{17}&3\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}1&-1&5\\0&2&6\\0&0&3\end{pmatrix}$ מטריצות צמודות.

פתרון: לשתיהן יש 3 ע"ע שונים שהם $1,2,3$ ולכן שתיהן דומות למטריצה

$$\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}$$

.