בוחן לינארית 2 חורף תשעח

20.12.2017

מתרגלים: אחיה בר־און ותמר בר־און.

- ענו על 3 מתוך 4 שאלות.
- **כתבו בדף הראשון של המחברת את הת.ז. שלכם בצורה ברורה.**
- הקפידו על סדר ניקיון.
- משך הבוחן: שעה וחצי.
- ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.
- נמקו כל תשובה.
- כל שאלה 34 נקודות.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי־ מומלץ להתחיל עם שאלות אותן אתם יודעים לפתור.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות עליהן אתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

1	
2	
3	
total	

בהצלחה!

1. תהיינה $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$. יהא $\lambda\in\mathbb{F}$. הוכיחו כי λ ע"ע של AB אמ"מ λ ע"ע של BA [פצלו למקרים: $\lambda=0$ ו $\lambda\neq 0$].

פתרון: אם $\lambda=0$ אז AB לא הפיכה. לכן $|AB|=0$ ומכאן ש $|BA|=|AB|=0$ ולכן BA אינה הפיכה ולכן $\lambda=0$ ע"ע של BA.

אם $\lambda\neq 0$, לפי הגדרה קיים $v\neq 0$ כך ש $ABv=\lambda v$. בהכפלה ב B משמאל נקבל $BABv=B\lambda v=\lambda Bv$. λ ע"ע ש לBA בהנחה ש Bvו"ע שזה קורה אם $Bv\neq 0$. כיוון ש $\lambda\neq 0,v\neq 0$ אז $\lambda v\neq 0$ ולכן, אם נניח בשלילה כי $Bv=0$ אז בהכפלה ב A משמאל נקבל כי $ABv=0$ אבל $ABv=\lambda v$ ונקבל סתירה.

מה שהוכחנו שאם λ ע"ע של AB אז הוא גם של BA. לכל שתי מטריצות A,B. בפרט אם ניקח $A=B$ ו $B=A$ נקבל את הכיוון השני.

2. תהא $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש $N(A)=0$. בנוסף נתון כי A^2 לכסינה וכל הערכים העצמיים שלה אי שליליים. הוכיחו כי A לכסינה.

פתרון: כיוון ש $N(A)=0$ נקבל כי A הפיכה ולכן 0 אינו ע"ע. בנוסף כיוון ש A^2 לכיסנה הפ"מ

$$m_{A^2}(x)=\prod_{i=1}^{t}(x-\lambda_i)$$

מל"ל לגורמים שונים. לפי הגדרה

$$m_{A^2}(A^2)=\prod_{i=1}^{t}\left(A^2-\lambda_i I\right)=0$$

כיוון שנתון ש λ_i הע"ע אי שלילים נקבל כי הם חיוביים (כי 0 אינו ע"ע) ולכן יש להם שורש ממשי. לכל i מתקיים $\left(A^2-\lambda_i I\right)=\left(A-\sqrt{\lambda_i}I\right)\left(A+\sqrt{\lambda_i}I\right)$ולכן A מאפסת את הפולינום

$$p(x)=\prod_{i=1}^{t}\left(x-\sqrt{\lambda_i}\right)\left(x+\sqrt{\lambda_i}\right)$$

ולכן $m_A|p$. כיוון ש p מל"ל (לפי העניים) לגורמים שונים ($\pm\sqrt{\lambda_i}$ שונים כי $\lambda_i\neq 0$ ושורשים של מספרים שונים שונים) נקבל כי גם m_A מל"ל לגורמים שונים ולכן A לכסינה.

3. נגדיר

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\2&-1&-5\\-2&3&7\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$$

מצאו את צורת זורדן של A.

פתרון: מתקיים

$$p_A(x)=(x-2)^2(x-4)$$

$$V_2=sapn\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\},V_4=sapn\left\{\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ולכן בצורת זורדן J יש בלוק 1 של ע"ע 4(לפי הר"ג) שהוא מגודל 1×1(לפי הר"א כי אחרת יופיע 4 יותר מפעם אחת על האלכסון). ב J יש בלוק 1 של ע"ע 2(לפי הר"ג) ולכן הוא מגודל 2×2 (כי סה"כ J היא מטריצה 3×3). סה"כ נקבל כי

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$$

4. ראינו בתרגול שלכל מטריצה $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ הפיכה קיימת $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ כך ש $B^2 = A$.

(א) האם הטענה נכונה עבור מטריצות לא הפיכות? כלומר־ הוכיחו/הפירכו:
לכל מטריצה $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ <u>לא הפיכה</u> קיימת $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ כך ש $B^2 = A$.

פתרון: הפרכה: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{pmatrix}$ ננח בשלילה כי B מקיית $B^2 = A$. אזי $B^4 = A^2 = 0$ ולכן Bנילפוטנטית ולכן $p_B(x) = x^2$. אם $m_B(x) = x$ נקבל כי Bלכסינה ואז גם $B^2 = A$ לכסינה סתירה. לכן $m_B(x) = x^2$ ו Bדומה לצורת זורדן A כלומר קיימת P הפיכה כך ש $B = PAP^{-1}$ ולכן $A = B^2 = PA^2P^{-1} = P0P^{-1} = 0$. סתירה.

(ב) האם הטענה נכונה במקרה הממשי? כלומר־ הוכיחו/הפירכו:
לכל מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ <u>הפיכה</u> קיימת $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש $B^2 = A$.

פתרון: הפרכה: ניקח מטריצה עם דטרמנ' שלילית, למשל $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & -4 \end{pmatrix}$ ננח בשלילה כי B מקיית $B^2 = A$. אזי מכפליות הדט' נקבל $-4 = |A| = |B^2| = |B|^2$ אבל $|B|$ ממשי ולכן $0 \leq |B|^2$סתירה.