# אנליזה מודרנית – פתרון תרגיל בית 3

.1

$\Leftarrow$ :

נניח כי $E$ מדידה ( $E \in S$ ) ויש להוכיח כי $I_E$ פונקציה מדידה. ובכן, יהי $\alpha \in \mathbb{R}$. מתקיים

$$\left\{x \in X : I_E\left(x\right) \geq \alpha\right\} = \begin{cases} \varnothing & \alpha > 1 \\ E & 0 < \alpha \leq 1 \\ X & \alpha \leq 0 \end{cases}$$

ובכל מקרה קבוצה זו שייכת ל- $S$ .

$\Rightarrow$ :

נניח כי $I_E$ מדידה. ע"פ ההרצאה מתקיים $I_E^{-1}\left[\{1\}\right]$ מדידה. ז"א $\left\{x \in X : I_E\left(x\right) = 1\right\} = E$ מדידה.

2. נראה שהניסוח היה קצת מבלבל, מצטער.

יהי $\alpha \in \mathbb{R}$ ניקח סדרה $\left\{\alpha_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ ב- $E$ ששואפת בעלייה אל $\alpha$ (זה תמיד אפשרי). ובכן $\left\{x \in X : f\left(x\right) \geq \alpha\right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x \in X : f\left(x\right) \geq \alpha_n\right\}$ . הצגנו את $\left\{x \in X : f\left(x\right) \geq \alpha\right\}$ כחיתוך בן מנייה של קבוצות מדידות, ולכן היא מדידה.

3. יהי $\alpha \in \mathbb{R}$ , $\left\{x \in X : \left(g \circ f\right)\left(x\right) > \alpha\right\} = \left(g \circ f\right)^{-1}\left[\left(\alpha, \infty\right)\right] = f^{-1}\left[g^{-1}\left[\left(\alpha, \infty\right)\right]\right]$ .

$g$ רציפה, ולכן $g^{-1}\left[\left(\alpha, \infty\right)\right]$ היא פתוחה. ע"פ האפיון לקבוצות פתוחות שניתן בתרגול נוכל לרשום $g^{-1}\left[\left(\alpha, \infty\right)\right] = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ כאשר $\left\{I_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ הם קטעים פתוחים וזרים הדדית. נמשיך:

$\left\{x \in X : \left(g \circ f\right)\left(x\right) > \alpha\right\} = \left(g \circ f\right)^{-1}\left[\left(\alpha, \infty\right)\right] = f^{-1}\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right] = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left[I_n\right]$ והביטוי האחרון הוא קבוצה מדידה, כאיחוד בן מנייה של קבוצות מדידות. (בהרצאה ראינו שאם $f$ מדידה אז לכל קטע $I$ , $f^{-1}\left[I\right]$ היא קבוצה מדידה).

.4

א. $f$ מדידה (בורל) ולכן $f^3$ מדידה (בורל) (הרכבה של פונקציה רציפה על מדידה – תרגיל קודם).

פונקצית הזהות $x$ היא מדידה בורל. הפרש של פונקציות מדידות הוא מדיד, ולכן $x \mapsto f^3\left(x\right) - x$ מדידה בורל. המדידות של $A$ נובעת ממדידות $f^3\left(x\right) - x$ עם $\alpha = 0$ .

ב. $f$ מדידה (בורל) ולכן $f^2+e^f-f$ מדידה (בורל) (הרכבה של רציפה על מדידה).
הפונקציה $e^x$ מדידה בורל כי היא רציפה. חיסורן נותן שהפונקציה
$x\mapsto f^2\left(x\right)+e^{f(x)}-f\left(x\right)-e^x$ מדידה בורל. מדידות הקבוצה $B$ נובעת מכך עם $\alpha=0$ .

5. מספיק לבדוק את התנאי עבור $\alpha\neq 0$ שכן $\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$ צפופה ב- $\mathbb{R}$ (שאלה 2). ובכן יהי
$\alpha\neq 0$ .

$$\left\{x\in X:\frac{1}{f\left(x\right)}>\alpha\right\}=\left\{x\in X:\frac{1}{f\left(x\right)}>\alpha, f\left(x\right)>0\right\}\cup\left\{x\in X:\frac{1}{f\left(x\right)}>\alpha, f\left(x\right)<0\right\}$$
$$=\left\{x\in X:1>\alpha f\left(x\right), f\left(x\right)>0\right\}\cup\left\{x\in X:1<\alpha f\left(x\right), f\left(x\right)<0\right\}$$

אם $\alpha>0$ נקבל

$$\left\{x\in X:\frac{1}{f\left(x\right)}>\alpha\right\}=\left\{x\in X:\frac{1}{\alpha}>f\left(x\right), f\left(x\right)>0\right\}\cup\left\{x\in X:\frac{1}{\alpha}<f\left(x\right), f\left(x\right)<0\right\}$$
$$=f^{-1}\left[\left(0,\frac{1}{\alpha}\right)\right]\cup f^{-1}\left[\left(\frac{1}{\alpha},0\right)\right]=f^{-1}\left[\left(0,\frac{1}{\alpha}\right)\right]$$

והקבוצה האחרונה מדידה, כי $f$ מדידה.

אם $\alpha<0$ נקבל

$$\left\{x\in X:\frac{1}{f\left(x\right)}>\alpha\right\}=\left\{x\in X:\frac{1}{\alpha}<f\left(x\right), f\left(x\right)>0\right\}\cup\left\{x\in X:\frac{1}{\alpha}>f\left(x\right), f\left(x\right)<0\right\}$$
$$=f^{-1}\left[\left(0,\infty\right)\right]\cup f^{-1}\left[\left(-\infty,\frac{1}{\alpha}\right)\right]$$

וזו מדידה כאיחוד שתי קבוצות מדידות.