עקמומיות של עקומות על משטחים

....

עקומה גיאודזית

עקומה $\beta(t) = X \circ \alpha(t)$ היא עקומה גיאודזית אם

1. $k_g = 0$ לכל t
2. באופן שקול, β'' תלוי לינארית בווקטור הנורמל $\underline{n}$(בכיוון הנורמל למשטח)(זה אומר שβ'' פרופורציונאלי לנורמל)
3. עקומה $\beta(t) = X \circ \alpha(t)$ גיאודזית אם ורק אם $(1) = (2) = 0$(משוואות גיאוזדיות - מהוות מבחן לקביעה האם $\alpha(t)$ גיאודזית או לא).

ניזכר

(X_1, X_2, n) בסיס ל$\mathbb{R}^3$. אפשר להציג את β' כקומבינציה לינארית שלהם
ראינו:

$$\beta''(t) = X\left(\alpha^1(t), \alpha^2(t)\right)$$

$$\beta'' = \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}^2\alpha^1}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^1_{ij}\frac{\mathrm{d}\alpha^i}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha^j}{\mathrm{d}t}\right)}_{(1)} X_1 + \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}^2\alpha^2}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^2_{ij}\frac{\mathrm{d}\alpha^i}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha^j}{\mathrm{d}t}\right)}_{(2)} X_2 + \underbrace{\left(L_{ij}\frac{\mathrm{d}\alpha^i}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha^j}{\mathrm{d}t}\right)}_{\text{normal curve}=\langle\beta'',n\rangle} n$$

(כאן מוכל המידע על k_g)
$(1), (2)$ הן המשוואות הגיאודזיות, והן רכיבים בT_p. כל מה שצריך בשביל משוואות גיאודזיות זה לחשב את Γ^k_{ij}. זה אומר שהן תכונות <u>פנימיות</u> של המשטח.

תרגיל

מצא את העקומות הגיאודזיות במישור

פתרון

דרך א: נמצא את המשוואות הגיאודזיות:

נמצא סימני כריסטופל - כולם שווים 0 $\Gamma^k_{ij}=0$. המשוואות הגיאודזיות:

$$\begin{cases} (1) & \dfrac{\mathrm{d}^2\alpha^1}{\mathrm{d}t^2}=0 \\ (2) & \dfrac{\mathrm{d}^2\alpha^2}{\mathrm{d}t^2}=0 \end{cases}$$

$\alpha(t)=(at+b,ct+d)$ - קו ישר $\Leftarrow$ עבור מישור קיימת פרמטריזציה $X\left(u^1,u^2\right)$ שהיא פונקציה לינארית של u^1 ו-u^2. $X\circ\alpha(t)$ פונקציה לינארית ולכן קו ישר.

דרך ב: $\beta(t)$ עקומה במישור. אזי β' מוכל במישור, וגם β'' מוכל במישור $\Leftarrow$ ההטלה שלו לכיוון הנורמל=0 $\Leftarrow$

$$\beta''=k_g\cdot(\beta' Xn)$$

אם זו עקומה גיאודזית אז $k=|\beta''|=|k_g|=0$. לכל עקומה גיאודזית במישור $k=0$ $\Leftarrow$ כל העקומות הגיאודזיות הן קווים ישרים.

עקומות גיאודזיות על ספירה

העקומות הגיאודזיות על הספירה הן מעגלים ראשיים. מתקבלים מחיתוך הספירה עם מישור שעובר ב-0.

תרגיל

יהי $X(\theta,\phi)$ משטח סיבוב של עקומה במ"י $(f(\phi),0,g(\phi))$ המוכלת במישור xz.
עקומה $\beta(t)=X(\theta(t),\phi(t))$ נמצאת על משטח זה ומקיימת $\beta''(t)$ פרופורציונאלי ל-$X_\theta\times X_\phi$ בכל נקודה $\beta(t)$. מצא משוואות דיפרנציאליות שעל $(\theta(t),\phi(t))$ לקיים.

פתרון

β'' פרופורציונאלי לנורמל $\Leftarrow$ β עקומה גיאודזית. צריך למצוא את המשוואות הגיאודזיות:

$$\begin{aligned} (1) \qquad & \frac{\mathrm{d}^2\alpha^1}{\mathrm{d}t^2}+\Gamma^1_{ij}\frac{\mathrm{d}\alpha^i}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\alpha^j}{\mathrm{d}t}=0 \\ (2) \qquad & \frac{\mathrm{d}^2\alpha^2}{\mathrm{d}t^2}+\Gamma^2_{ij}\frac{\mathrm{d}\alpha^i}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\alpha^j}{\mathrm{d}t}=0 \end{aligned}$$

המשטח הוא

$$X(\theta,\phi)=(f(\phi)\cos\theta,f(\phi)\sin\theta,g(\phi))$$

נחשב את סימני כריסטופל:

$$\begin{array}{c} X_\theta=(-f(\phi)\sin\theta,f(\phi)\cos\theta,0) \\ X_\phi=(f'\cos\theta,f'\sin\theta,g') \end{array} \Rightarrow g_{ij}=\begin{pmatrix} f^2 & 0 \\ 0 & (f')^2+(g')^2 \end{pmatrix} \Rightarrow g^{ij}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{f^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(f')^2+(g')^2} \end{pmatrix}$$

נשים לב שX משטח סיבוב של עקומה במהירות יחידה ־ כלומר

$$\gamma'(\phi) = (f'(\phi), 0, g'(\phi))$$

$$|\gamma'|^2 = 1 = (f')^2 + (g')^2$$

לכן

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} f^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad g^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{f^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

סימני כריסטופל הם:

Γ^1_{ij}	$i=1$	$i=2$
$j=1$	0	$\frac{f'}{f}$
$j=2$	$\frac{f'}{f}$	0

Γ^2_{ij}	$i=1$	$i=2$
$j=1$	$-f\cdot f'$	0
$j=2$	0	0

לכהמשוואות הגיאודזיות הן[1]

$$\begin{aligned} &(1) \qquad \ddot{\theta} \quad +2\frac{f'}{f}\dot{\theta}\cdot\dot{\phi} = 0 \\ &(2) \qquad \quad \ddot{\phi} - f\cdot f'\left(\dot{\theta}\right)^2 = 0 \end{aligned}$$

(1) הם יחדי קלרו: $\boxed{f\cos\mu = \text{const}}$ של הזווית שהעקומה יוצרת עם קו רוחב)

עקומות גיאודזיות על ספירה

נרצה להראות שכל העקומות הגיאודזיות על הספירה הם מעגלים ראשיים = מתקבלים מחיתוך הספירה עם מישור שעובר ב0.

- אם עקומה היא באורך קבוע $|\beta(t)| = \text{const}$ $\Leftarrow$ אז $\beta' \perp \beta$
- אם עקומה היא במהירות יחידה $|\beta'(t)| = 1$ $\Leftarrow$ β' באורך קבוע $\Leftarrow$ $\beta'' \perp \beta'$

המטרה היא להראות ש<u>β'' תלוי לינארית בנורמל</u>. אם זה קורה ־ העקומה גיאודזית.
$\underline{n} \parallel \beta(t)$ ולכן התנאי הופדל ל ־ β'' צריך להיות תלוי לינארית ב$\beta(t)$.
מה מיוחד במעגלים ראשיים?
β^n נמצא במישור שבו מוכלת העקומה, וכאשר המעגל ראשי העקומה מוכלת במישור שעובר בנק. 0
אם β'' ו$\beta(t)$ ווקטורים באותו המישור ושנ יהם מאונכים לβ' $\Leftarrow$ הם בהכרח תלויים לינארית.

[1]סימון בפיסיקה ־ $\dot{f}$ זו גזירה לפי t(לפי הזמן)