פתרון תרגיל בית 12 מבוא לחוגים ומודולים
88-212 סמסטר ב' תשפ"א

שאלה 1. יהיו $R \subseteq S$ חוגים, ויהי $a \in S$ שהוא אלגברי מעל R והפיך ב-S. הראו כי a^{-1} גם הוא אלגברי מעל R.

פתרון. נתון ש-a אלגברי מעל R, לכן קיימים $r_0, \dots, r_{n-1} \in R$, לא כולם אפס, שעבורם

$$r_0 + r_1 a + \dots + r_n a^n = 0.$$

נכפול ב-$(a^{-1})^n$ ונקבל

$$r_0(a^{-1})^n + r_1(a^{-1})^{n-1} + \dots + r_n = 0.$$

זה פולינום לא אפסי שמאפס את a^{-1}, ולכן a^{-1} אלגברי מעל R.

שאלה 2. מצאו באופן מפורש פולינום מתוקן מעל $\mathbb{Z}$ המאפס את $\sqrt{2} + \sqrt{5}$.

פתרון. נסמן $x = \sqrt{2} + \sqrt{5}$. אז $x^2 = 2 + 2\sqrt{10} + 5 = 7 + 2\sqrt{10}$. לכן $x^2 - 7 = 2\sqrt{10}$. נעלה בריבוע ונקבל $(x^2 - 7)^2 = 40$, ואם נפתח סוגריים נקבל פולינום מתוקן שמאפס את $\sqrt{2} + \sqrt{5}$: $x^4 - 14x^2 + 9 = 0$.

שאלה 3. יהי F שדה שהוא הרחבה שלמה של תחום שלמות R. הוכיחו ש-R הוא שדה.

פתרון. יהי $0 \neq a \in R$. רוצים להוכיח ש-a הפיך ב-R, או במילים אחרות ש-$a^{-1} \in R$ (כאשר מחשבים את a^{-1} בשדה F). לפי הנתון, a^{-1} הוא שלם מעל R, לכן קיימים $r_0, \dots, r_{n-1} \in R$ שעבורם

$$(a^{-1})^n + r_{n-1}(a^{-1})^{n-1} + \dots + r_0 = 0$$

נכפול ב-a^{n-1} ונעביר אגף כדי לקבל

$$a^{-1} = r_{n-1} + r_{n-2}a + \dots + r_0 a^{n-1} \in R$$

כנדרש.

שאלה 4. יהי R תחום דדקינד, ויהיו $0 \neq I, J \lhd R$ אידאלים. אם $I = P_1^{e_1} \cdots P_r^{e_r}$ ו-$J = P_1^{f_1} \cdots P_r^{f_r}$ עבור $P_i \lhd R$ ראשוניים ו-$e_i, f_i \geq 0$, אז

$$\begin{aligned} I + J &= P_1^{\min\{e_1, f_1\}} \cdots P_r^{\min\{e_r, f_r\}} \\ I \cap J &= P_1^{\max\{e_1, f_1\}} \cdots P_r^{\max\{e_r, f_r\}} \\ IJ &= P_1^{e_1 + f_1} \cdots P_r^{e_r + f_r} \end{aligned}$$

פתרון. עבור מכפלה קל לבדוק:

$$IJ = (P_1^{e_1} \cdots P_r^{e_r})(P_1^{f_1} \cdots P_r^{f_r}) = P_1^{e_1 + f_1} \cdots P_r^{e_r + f_r}.$$

נדגים עבור סכום, עבור חיתוך אפשר להוכיח באופן דומה. אנחנו יודעים $I \subseteq I + J$, לכן $I \mid (I + J)$, ואפשר לכתוב $I + J = P_1^{t_1} \cdots P_r^{t_r}$ עבור $t_i \leq e_i$. בדומה $t_i \leq f_i$, לכן $t_i \leq \min\{e_i, f_i\}$. מצד שני, $P_1^{\min\{e_1, f_1\}} \cdots P_r^{\min\{e_r, f_r\}}$ הוא אידאל של R שמכיל את I ואת J, לכן $I + J \subseteq P_1^{\min\{e_1, f_1\}} \cdots P_r^{\min\{e_r, f_r\}}$.

שאלה 5. מצאו את הפירוק של האידאלים $2\mathcal{O}_D$ ו-$3\mathcal{O}_D$ למכפלה של אידאלים ראשוניים בחוג $\mathcal{O}_D$ עבור $D = 11, 13$.

פתרון. נדגים עם $D = 11$. כדי למצוא את הפירוק של האידאלים $2\mathcal{O}_{11}$ ו-$3\mathcal{O}_{11}$, צריך להבין מי האידאלים הראשוניים שמכילים אותם. בשביל זה אפשר להסתכל על חוג המנה ולהבין מיהם האידאלים הראשוניים בו.

נתחיל מ-2. בחוג המנה 2 שקול ל-0, ולכן נשארים רק ארבעה נציגים למחלקות: $\{0, 1, \sqrt{11}, 1+\sqrt{11}\}$. אף אחד מהם לא שקול לאחר, אז אלו כל הנציגים. מצד שני, $(1+\sqrt{11})^2 = 1 + 2\sqrt{11} + 11 = 12 + 2\sqrt{11} \in 2\mathcal{O}_{11}$, כלומר $1+\sqrt{11}$ נילפוטנטי בחוג המנה. לכן זה לא שדה. בדרך אחרת,

$$\mathcal{O}_{11} = \mathbb{Z}[\sqrt{11}] \cong {}^{\mathbb{Z}[x]}\!/\!_{\langle x^2-11\rangle}$$

ולכן

$$\mathcal{O}_{11}/2\mathcal{O}_{11} \cong {}^{\mathbb{Z}[x]/\langle x^2-11\rangle}\!/\!_{\mathbb{Z}[x]/\langle 2,x^2-11\rangle} \cong {}^{(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[x]}\!/\!_{\langle x^2-11\rangle} = {}^{(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[x]}\!/\!_{\langle x^2-1\rangle} = {}^{(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[x]}\!/\!_{\langle (x-1)^2\rangle}.$$

גם פה רואים שלא מדובר בשדה. יש פה אידאל ראשוני יחיד שהוא האידאל שנוצר על ידי $(x-1) + \langle (x-1)^2 \rangle$ בחוג המנה (במונחים של קודם: זהו האידאל שנוצר על ידי $1+\sqrt{11}$ בחוג המנה). לכן $2\mathcal{O}_{11}$ מתפרק למכפלה

$$2\mathcal{O}_{11} = \left\langle 2, 1+\sqrt{11} \right\rangle^2.$$

נעבור ל-3. כעת חוג המנה הוא

$$\mathcal{O}_{11}/3\mathcal{O}_{11} \cong {}^{\mathbb{Z}[x]/\langle x^2-11\rangle}\!/\!_{\mathbb{Z}[x]/\langle 3,x^2-11\rangle} \cong {}^{(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[x]}\!/\!_{\langle x^2-11\rangle} = {}^{(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[x]}\!/\!_{\langle x^2-2\rangle}.$$

אבל הפולינום x^2-2 הוא אי-פריק מעל $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, לכן זה שדה, כלומר $3\mathcal{O}_{11}$ הוא מקסימלי (ולכן ראשוני) בעצמו.

עבור $D = 13$ צריך טיפה להיזהר כי פה $\mathcal{O}_{13} = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{13}}{2}]$. אם נסמן $a = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$, נקבל שהוא שורש של x^2-x-3. לכן

$$\mathcal{O}_{13} \cong {}^{\mathbb{Z}[x]}\!/\!_{\langle x^2-x-3\rangle}.$$

באופן דומה אפשר לחשב מנות ולקבל: $2\mathcal{O}_{13}$ הוא ראשוני, $3\mathcal{O}_{13} = \left\langle \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{1-\sqrt{13}}{2} \right\rangle$.

שאלה 6. האם $\mathbb{Z}[x]$ הוא תחום דדקינד? הוכיחו את תשובתכם.

פתרון. $\mathbb{Z}[x]$ הוא לא תחום דדקינד, כי יש בו אידאלים ראשוניים לא אפסיים שאינם מקסימליים. למשל, $\langle x \rangle$ הוא ראשוני שאינו מקסימלי (כי המנה היא $\mathbb{Z}$ שהוא תחום שלמות ולא שדה).

שאלה 7. יהי R תחום דדקינד, ויהי $\mathfrak{a} \neq 0$ אידאל שברי של R.

א. הראו כי קיים $r \in R$ שעבורו $r\mathfrak{a} \subseteq R$, וכי $r\mathfrak{a}$ הוא אידאל של R.

ב. הסיקו כי קיימים אידאלים $0 \neq I, J \lhd R$ שעבורם $\mathfrak{a} = IJ^{-1}$.

פתרון.

א. $\mathfrak{a}$ הוא אידאל שברי של R, לכן הוא תת-R-מודול נוצר סופית של $\mathrm{Frac}(R)$. נניח ש-$x_1, \ldots, x_n$ יוצרים של $\mathfrak{a}$ כ-R-מודול. אבל אנחנו עובדים בשדה השברים של R, לכן אפשר לכתוב $x_i = \frac{a_i}{b_i}$ עבור $a_i, b_i \in R$, $b_i \neq 0$. נגדיר $r = b_1 \cdots b_n$. זה איבר שונה מ-0 כי R תחום דדקינד, ומצד שני $rx_i \in R$ לכל i, לכן $r\mathfrak{a} \subseteq R$. בדיקה ישירה מראה שזהו אידאל של R.

ב. אפשר לקחת $I = r\mathfrak{a}$ ו-$J = rR$ (האידאל הראשי הנוצר על ידי r). זה עובד כי

$$J\mathfrak{a} \subseteq I \Longrightarrow \mathfrak{a} = R\mathfrak{a} = (J^{-1}J)\mathfrak{a} = J^{-1}(J\mathfrak{a}) = J^{-1}I = IJ^{-1}$$

שאלה 8 (רשות)**.** יהי F שדה. הראו שהחוג ${}^{F[x,y]}\big/\big\langle x^2-y^3\big\rangle$ הוא תחום שלמות שאינו סגור בשלמות (בשדה השברים שלו).

בהצלחה!