הערות על הבוחן: כשמגדירים תת חבורה ע"י $\langle X \rangle$ הכוונה לכל המילים שאפשר ליצור עם איברי הקבוצה.

הטעות הכי נפוצה: בשביל להוכיח שG^2 נורמלית, כמעט כולם הראו ש$xg^2x^{-1} \in G^2$. הבעיה שg^2 הוא לא איבר כללי בG^2. כי ההגדרה של החבורה G^2 היא לא איברים מהצורה g^2, אלא מה מה שנוצר ע"י איברים כאלה.

מילה כללית בG^2 היא מהצורה

$$g_1^2 g_2^2 \cdots g_n^2$$

ולהראות שכל איבר כזה סגור להצמדה עם איבר כלשהו מהחבורה.

$$xg_1^2 g_2^2 \cdots g_n^2 x^{-1} = (xg_1^2x^{-1})(xg_2^2x^{-1}) \cdots (xg_n^2x^{-1})$$

תזכורת: תהי G חבורה כלשהי שפועלת על קבוצה X. נאמר שG פועלת טרנזיטיבית אם בX יש רק מסלול אחד. כלומר, לכל $x_1, x_2 \in X$ יש $g \in G$ כך ש $gx_1 = x_2$.

לדוגמא: החבורה $GL_n(\mathbb{F})$ פועלת טרנזיטיבית על $\mathbb{F}^n \setminus \{0\}$.

הלמה של ברנסהייד: תהי G חבורה שפועלת על קבוצה X. נסמן ב

$$X^g = \{x \in X : gx = x\}$$

עבור כל $g \in G$.

אזי מתקיים ש:

$$|G|k = \sum_{g \in G} |X^g|$$

כאשר k מסמל את מספר המסלולים בפעולה.

כאשר G סופית, אזי

$$k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

תרגיל. תהי G חבורה סופית שפועלת טרנזיטיבית על קבוצה X שיש בה לפחות 2 איברים. הוכיחו שקיים $g \in G$ כך ש$X^g = \emptyset$.

פתרון. G פועלת טרנזיטיבית זה אומר שיש מסלול אחד, כלומר $k = 1$. לכן מהלמה של ברנסהייד

$$|G| = \sum_{g \in G} |X^g|$$

נניח בשלילה שלכל $g \in G$, $X^g \neq \emptyset$, אז $|X^g| \geq 1$, אבל יש גם את $e \in G$ שידוע ש $X^e = X$ ולפי הנתון $|X| = |X|^e \geq 2$. אז נקבל $|G| = \sum_{g \in G} |X^g| \geq |G| + 1$. סתירה.

תרגיל. נניח שרוצים לקשט את הרחוב בדגלים . וכל דגל מורכב מ6 פסים מקבילים, וכל פס אפשר לצבוע באחד מ4 צבעים שבחרנו מראש. כמה דגלים אפשר ליצור?

פתרון. לכאורה היינו אומרים 4^6. כי לכל פס אפשר לבחור אחד מ4 הצבעים.

אבל אפשר גם להפוך את הדגלים. אז אם צבענו נניח דגל באדום, צהוב, אדום,צהוב, אדום, צהוב, אז אנחנו יכולים גם להפוך את הדגל ועכשיו לקבל דגל שהוא צהוב, אדום, צהוב, אדום, צהוב, אדום. כלומר, יכולות להיות צביעות שונות שיוצרות את אותו דגל.

כלומר, נסתכל על מרחב ה"צביעות האבסטרקטיות", זה שווה ל$\mathbb{Z}_4^6$. על הקבוצה הזאת יש פעולה של $\mathbb{Z}_2$ שמוגדרת באופן הבא: 0 לא עושה כלום, ו1 הופך את הכיוון של הוקטור.

אנחנו רוצים לספור כמה מסלולים יש ביחס לפעולה.

$$k = \frac{1}{|\mathbb{Z}_2|}\left(|X^0| + |X^1|\right)$$

$$|X^0| = |X| = 4^6$$

$$|X|^1 = 4^3$$

כי מספיק לקבוע את שורות $1, 2, 3$ וזה קובע את שורות $4, 5, 6$ (כי שורה 6 שווה ל1, 5 ל2 ו4 ל3).

$$k = \frac{1}{2}(4^6 + 4^3) = 2080$$

משפט קיילי

משפט. תהי G חבורה שפועל על קבוצה X. אזי קיים הומומורפיזם

$$G \to S_{|X|}$$

אם הפעולה נאמנה (כלומר, לכל $e \neq g$יש $x \in X$ כך ש$gx \neq x$) אז זה מונומורפיזם.

לכל G יש פעולה נאמנה על G ע"י כפל משמאל. לכן

$$G \hookrightarrow S_{|G|}$$

דוגמה. נקח את D_3. הגודל של D_3 הוא 6, ולכן נקבל שיכון דרך משפט קיילי

$$D_3 \hookrightarrow S_6$$

בשביל למצוא את השיכון במפורש אנחנו צריכים למספר את האיברים, ואז לראות עבור כל איבר, איזה תמורה ההכפלה בו משמאל יוצרת.

שימו לב שאם תמספרו בצורה שונה, תקבלו העתקות שונות.

$$1 = e, 2 = \sigma, 3 = \sigma^2, 4 = \tau, 5 = \tau\sigma, 6 = \tau\sigma^2$$

$$\sigma e=\sigma, \sigma\sigma=\sigma^2, \sigma\sigma^2=\sigma^3, \sigma\tau=\tau\sigma^2, \sigma\tau\sigma=\tau, \sigma\tau\sigma^2=\tau\sigma$$

$$\sigma \to (1,2,3)(4,6,5)$$

$$\tau e=\tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2, \tau^2=e, \tau(\tau\sigma)=\sigma, \tau(\tau\sigma^2)=\sigma^2$$

$$\tau \to (1,4)(2,5)(3,6)$$

משפט. העידון של משפט קיילי: G פועלת על קבוצת המנה G/H עבור כל תת חבורה $H \leq G$.

$$g*(xH)=gxH$$

אז אם יש לG תת חבורה מאינדס n, נקבל הומומורפיזם

$$G \to S_n$$

אם במקרה הפעולה תהיה נאמנה, ההומומורפיזם יהיה שיכון.

הערה. אם G חבורה פשוטה (אין תת חבורות לא טריוויאליות), אז כל הומומורפזים $G \to K$ הוא או הטריויאלי, או שיכון. (כי הגרעין הוא תת חבורה נורמלית, ולכן שווה או להכל, או ל0).

אם G פועלת על X, $G \to S_{|X|}$ הוא טריוויאלי אמ"ם הפעולה היא טריוויאלי, כלומר $\forall g, \forall x, gx=x$.

אז אם G היא חבורה פשוטה, כל פעולה לא טריוויאלית תהיה נאמנה, ולכן נקבל שיכון $G \hookrightarrow S_{|X|}$

תרגיל. יהי $n \geq 5$ ו $H < A_n$ (תת חבורה ממש). הוכיחו ש$[A_n : H] \geq n$.

פתרון. לכל $n \geq 5$, A_n היא חבורה פשוטה. נסמן $[A_n : H]=m$. לפי העידון של משפט קיילי, נקבל הומומורפיזם

$$A_n \to S_m$$

A_n פשוטה ולכן $\ker A_n \to S_m$ הוא או $\{e\}$ או כל A_n. אבל הוא לא יכול להיות שווה לכל A_n, כי לכל אם $g \notin H$ מתקיים ש

$$gH \neq H$$

ולכן g לא פועל טריוויאלית אז התמורה זהוא מגדיר היא לא תמורת הזהות. והנחנו ש$H \neq A_n$ ולכן יש איברים ב$A_n \setminus H$. קיבלנו שההעתקה הזאת היא מונומורפיזם, לכן

$$|A_n| \mid |S_m|$$

$$\frac{n!}{2} \mid m!$$

אז $m \geq n$.

מסקנה: למשל לA_5 אין תתי חבורות באינדקסים $2, 3, 4$. ולכן אין תתי חבורות בגודל $30, 20, 15$.

תרגיל. תהי G חבורה מסדר $2n$ כאשר $n \neq 1$ מספר אי זוגי. הוכיחו שיש לG תת חבורה מאינדקס 2 (ובפרט G לא חבורה פשוטה)

פתרון. לפי משפט קיילי $f: G \hookrightarrow S_{2n}$. ידוע ש$A_{2n} \leq S_{2n}$ תת חבורה מאינדקס 2.
נכיוון שf הוא מונומרפיזם אז $G \cong f[G]$. אז כל טענה שאנחנו רוצים להוכיח על G אפשר להוכיח על $f[G]$. אז אנחנו רוצים להוכיח של$f[G]$ יש תת חבורה מאינדקס 2 .
נסתכל על $f[G] \cap A_{2n}$. היא אכן תת חבורה של $f[G]$. היא אפילו נורמלית (חיתוך של תת חבורה נורמלית). מאיזו 2 נקבל ש:

$$[f[G] : f[G] \cap A_{2n}] = [f[G]A_{2n} : A_{2n}] \leq [S_{2n} : A_{2n}]$$

כי $A_{2n} \leq f[G]A_{2n} \leq S_{2n}$

$$[S_{2n} : A_{2n}] = [S_{2n} : f[G]A_{2n}][f[G]A_{2n} : A_{2n}]$$

לכן $[f[G]A_{2n} : A_{2n}] = 1 \vee 2$.
אינדקס 1 מתקבל רק כאשר התת חבורה שווה לחבורה. כלומר, במקרה שלנו כאשר $f[G] \cap A_{2n} = f[G]$.
יש שוויון רק כאשר $f[G] \subseteq A_{2n}$.
כלומר מספיק להוכיח שהתמונה של G לא מכילה רק תמורות זוגיות.
הגודל של G הוא $2n$, כלומר הוא זוגי, לכן יש איבר מסדר 2. נקרא לו x.
אנחנו צריכים להבין לאן שיכון קיילי שולח את x. נמספר את איברי החבורה

$$g_1, \dots g_{2n}$$

$$xg_i = g_j$$

$$xg_j = x(xg_i) = x^2 g_i = g_i$$

כלומר אם x שולחת את i לj היא תשלח את j לi.
אז קיבלנו ש$f(x)$ הוא מכפלה של חילופים, מחזורים מאורך 2.
בנוסף, לא ייתכן $i \to i$ כי $xg_i \neq g_i$ כי $x \neq e$.
ולכן סה"כ נקבל ש$f(x)$ הוא מכפלה של n חילופים, מכיוון שn אי זוגי, זאת תמורה אי זוגית.
מסקנה: $f[G] \cap A_{2n} \neq f[G]$ ולכן $f[G] \cap A_{2n}$ היא תת חבורה מאינדקס 2 של $f[G]$.

תרגיל. תהי G חבורה ונניח שיש לה תת חבורה $H \leq G$ מאינדקס m. אז H מכילה תת חבורה נורמלית $K \trianglelefteq G$, שהאינדקס שלה $[G:H] \mid m!$
הוכחה: בזכות הפעולה של G על G/H נקבל הומומורפיזם

$$f : G \to S_m$$

נקח $K = \ker f$.

$$[G : \ker f] = |Imf| \mid m!$$

נותר להראות ש$\ker f$ מוכל בH.
הגרעין של ההומורפיזם זה האיברים $g \in G$ שפועלים טריוויאלית. כלומר, משאירים כל קוסט במקום. בפרט, הם משאירים את H במקום.

$$gH = H$$

וזה קורה רק עבור $g \in H$.
לכן $\ker f \subseteq H$.