

תרגיל בית 8 בשדות ותורת גלואה

88-311 סמסטר א' תש"ף

שאלה 1. כהכנה לאחרי חנוכה, שחקו ב"אוקלידס: המשחק" (או בקישור הזה) והגיעו לפחות לשלב 6. הרבה יותר נוח להשתמש במחשב נייד או נייד מאשר בטלפון.

שאלה 2. למי שרוצה להתנסות בעוד משחק של בניות בסרגל ומחוגה מוזמן לנסות את המשחק Euclidean. זה מספיק ממכר שכדאי לוודא שנשאר זמן לשאר תרגיל הבית.

שאלה 3. תהי $E = \mathbb{Q}[\alpha]/\mathbb{Q}$ הרחבת גלואה. נניח שיש $\sigma \in \text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ כך ש- $\sigma(\alpha) = \alpha^2$.
 א. האם ייתכן כי $[E : \mathbb{Q}] = 2$ אם כן, מצאו α מתאים.
 ב. האם ייתכן כי $[E : \mathbb{Q}] = 3$ אם כן, מצאו α מתאים.

שאלה 4. יהי $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ פולינום אי פריק עם שדה פיצול E . נניח שחבורת גלואה $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ היא אבלית. יהי a שורש של $f(x)$.

א. הוכיחו כי $\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q}$ הרחבת גלואה.

ב. הוכיחו כי $E = \mathbb{Q}(a)$.

שאלה 5. יהי F שדה ממאפיין שונה מ-2, ויהי K שדה הפיצול של פולינום מתוקן ספרבילי $f(x) \in F[x]$. נסמן את שורשי $f(x)$ ב- $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. נגדיר את הדיסקרימיננטה של $f(x)$ להיות

$$\Delta(f) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2$$

א. בדקו שהדיסקרימיננטה של $x^2 + bx + c$ זה מה שאתם חושבים שזה. להראות שהדיסקרימיננטה של $x^3 + ux + v \in \mathbb{Q}[x]$ היא $4u^3 + 27v^2$ זו רשות שהיא קצת יותר קשה. הדיסקרימיננטה כשמה כן היא: לפולינומים ב- \mathbb{R} היא "מאבחנת" את מספר השורשים הממשיים.

ב. הוכיחו כי $\Delta(f) \in F$. רמז: חילופים ב- S_n .

ג. נתבונן ב- $G := \text{Gal}(K/F)$ כתת-חבורה של S_n , ונסמן $G_0 = G \cap A_n$. הוכיחו כי $F[\sqrt{\Delta(f)}] = K^{G_0}$. רמז: מה היא ההגדרה של תמורה זוגית?

ד. הסיקו כי G משוכנת ב- A_n אם ורק אם $\sqrt{\Delta(f)} \in F$.

שאלה 6 (רשות לא קשה). יהיו שני פולינומים

$$f(x) = x^4 - 10x^2 + 1, \quad g(x) = (x^2 - 2)(x^2 - 3)$$

ראינו שיש להם את אותו שדה פיצול $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$. כמובן שחבורת גלואה $G = \text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ פועלת על השורשים של $f(x), g(x)$. הזכרו כי השורשים של $f(x)$

הם $\pm\sqrt{2} \mp \sqrt{3}, \pm\sqrt{2} \pm \sqrt{3}$ ושל g הם $\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}$. הוכיחו כי הפעולות לא איזומורפיות.
רמז: בשפה פשוטה מבקשים להראות שלא משנה איך נמספר את השורשים, הפעולות שונות.
אפשר קודם לשים לב שתת-החבורות המתאימות ב- S_4 אינן צמודות למשל.

בהצלחה!