פתרון תרגיל בית 10 במבנים אלגבריים
89-214 סמסטר א' תשע"ו

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום בכל דף שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול.
תאריך הגשת התרגיל הוא לתרגול בשבוע המתחיל בתאריך ז' שבט ה'תשע"ו, 17.1.16.

שאלה 1. הוכיחו שכל חבורה מסדר ראשוני p היא ציקלית ואיזומורפית ל- $\mathbb{Z}_p$.

פתרון.
כל חבורה מסדר ראשוני p היא בהכרח ציקלית.
הסיבה היא שמכיוון שמצד אחד, סדר של כל איבר בחבורה חייב לחלק את סדר החבורה ומצד שני, החבורה מסדר ראשוני ולכן אין לה מחלקים אמיתיים. כלומר נקבל שכל איבר בחבורה, מלבד e, הוא מסדר p.
למעשה, כל איבר יוצר את החבורה כולה.
להוכחת הטענה שכל חבורה ציקלית היא בהכרח איזומורפית ל $\mathbb{Z}_p$, נציג את האיזומורפיזם המפורש בין $G = \langle g \rangle$ ל $\mathbb{Z}_p$.
נגדיר הומומורפיזם $f : G \to \mathbb{Z}_p$ ע"י $f\left(g^k\right) = k$.
f הומומורפיזם כי: $f\left(g^i g^j\right) = f\left(g^{i+j}\right) = i + j = f\left(g^i\right) + f\left(g^j\right)$.
f חח"ע. ניתן להראות זאת ע"י בדיקה שגרעין ההעתקה טריוויאלי, כלומר $kerf = \left(g^k : f\left(g^k\right) = 0\right) = \left(g^k : k = 0\right) = 1_G$.
f על, מכיוון שלכל $k \in \mathbb{Z}_p$ קיים $g^k \in G$ המקיים $f\left(g^k\right) = k$.

שאלה 2. הוכיחו כי החבורה $S_3 \times U_{13}$ איזומורפית לחבורה $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \times D_3$.

פתרון.
$D_3 \cong S_3$. נשים לב שניתן לייצג את ששת המצבים השונים של המשולש המשוכלל המויצג ע"י הבורה הדיהדרלית D_3, ע"י תמורות כאיברים ב S_3.
כלומר: $\sigma = (123)$ ו $\tau = (12)$. כמו כן, מתקיים עבור $n = 3$: $2 \cdot n = n!$. לכן חבורות אלו איזומורפיות.
כמו כן, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \cong U_{13}$. הוכחה: $(3,4) = 1 \Leftarrow \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_{12}$.
כמו כן, U_{13}, ציקלית מסדר 12. ומכיוון שחבורות ציקליות מאותו סדר בהכרח איזומורפיות, נקבל את הדרוש.
לכן לסיכום $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \times D_3 \cong S_3 \times U_{13}$.

שאלה 3. נתונות שש חבורות מסדר 40. זהו אילו חבורות איזומורפיות זו לזו (נמקו):
$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, U_{10} \times \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{40}$
מצא חבורה נוספת מסדר 40, שאינה איזומורפית לאף אחת מחבורות אלו.

פתרון.
ניעזר בין היתר במושג האקספוננט של חבורה על מנת למיין את החבורות.
תזכורת: האקספוננט של החבורה $\exp(G)$ הוא המספר הטבעי הקטן ביותר n כך שלכל $g \in G$ מתקיים $g^n = e$.
כמו כן, נשתמש לאורך פתרון התרגיל באיזומורפיזם הבא: אם $(n, m) = 1$, אז $\mathbb{Z}_{nm} \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$.

מתקיים $(8,5)=1$ ולכן $\mathbb{Z}_{40}\cong\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_5$. האקספוננט של חבורה זו הוא 40.

$U_{10}=\{1,3,7,9\}\cong\mathbb{Z}_4$. (U_{10} ציקלית, ולכן איזומורפית ל $\mathbb{Z}_4$). כמו כן, $\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_2\cong\mathbb{Z}_{10}$ ולכן $\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4\cong\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_{10}\cong U_{10}\times\mathbb{Z}_{10}$.

האקספוננט של חבורה זו הוא 20.

לבסוף, האקספוננט של החבורה $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_5$ הוא 10.

כעת נציג חבורה נוספת מסדר 40 שאינה איזומורפית לאף אחת מאלו המוצגות בתרגיל. כל החבורות בתרגיל אבליות,

לכן ניקח את D_{20}. היא מסדר 40, אבל כידוע אינה אבלית, ולכן לא איזומורפית לאף אחת.

שאלה 4. מצאו את האיזומורפיזם המפורש מ $A=\mathbb{Z}_{77}\times\mathbb{Z}_5$ ל $B=\mathbb{Z}_{11}\times\mathbb{Z}_{35}$.

פתרון.

למציאת האיזומורפיזם המפורש, ניעזר בבניית האיזומורפיזם המשמש להוכחת הטענה שאם $(n,m)=1$, אז $\mathbb{Z}_{nm}\cong\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_m$.

האיזומורפיזם הוא: $(x,y)\to(x,15x-14y)$, כאשר בניית האיזומורפיזם נעשה ע"י הרכבת העתקות כאשר המסלול הוא:

$\mathbb{Z}_{77}\times\mathbb{Z}_5\cong\mathbb{Z}_7\times\mathbb{Z}_{11}\times\mathbb{Z}_5\cong\mathbb{Z}_{11}\times\mathbb{Z}_{35}$.

שאלה 5. נתונה התמורה $\pi=(1234)\,(56)\,(78)\in S_8$.

א. מצאו את מספר התמורות הצמודות לתמורה π.

ב. חישבו את גודל המְרַכֵּז של π.

פתרון.

אנו מחשבים למעשה את גודל מחלקת הצמידות של π, כלומר את $|\operatorname{conj}(\pi)|$.

כפי שלמדנו, האיברים במחלקת הצמידות של π הם התמורות עם אותו מבנה מחזורים.

יש לבחור 4 מספרים מתוך 8, עבור מחזור מאורך 4, וישנם $\binom{8}{4}(4-1)!$ מחזורים כאלו.

כדי לבחור את החילוף הראשון, יש לבחור 2 מספרים מתוך 4 הנותרים. כלומר $\binom{4}{2}$ אפשרויות.

החילוף האחרון נקבע לחלוטין ע"י הבחירות הקודמות. אין חשיבות לסדר של החילופים, ולכן נחלק ב 2.

בסה"כ ישנן: $1260=\frac{\binom{8}{4}\cdot 3!\cdot\binom{4}{2}}{2}$ תמורות הצמודות ל π ב S_8.

שאלה 6. רשמו את משוואת המחלקה עבור S_5.

פתרון.

משוואת המחלקה של S_5 היא: $120=1+10+20+30+24+15+20$.

נציג את החישוב:

- $|\{id\}|=1$
- $|\{(--)\}|=\binom{5}{2}=10$
- $|\{(---)\}|=\binom{5}{3}2!=20$
- $|\{(----)\}|=\binom{5}{4}3!=30$
- $|\{(-----)\}|=4!=24$
- $|\{(--)\,(--)\}|=\frac{\binom{5}{2}\binom{3}{2}}{2}=15$
- $|\{(---)\,(--)\}|=\binom{5}{3}2!=20$

בהצלחה!