בדידה תרגול 3 ־ קבוצות

13 ביולי 2020

1 הכלה ושייכות

קבוצה זה אוסף של איברים. ממקמים אותם בין סוגריים מסולסלות: $A = \{0, 2, aba\}$. אין משמעות לחזרה על איברים, ולסדר שלהם: $\{1,0\} = \{0,1\} = \{0,1,0\}$. אם איבר a שייך לקבוצה A נסמן $a \in A$. אם A, B קבוצות ומתקיים: $\forall a \in A : a \in B$ אז נאמר ש־A מוכלת ב־ B, ונסמן $A \subseteq B$.

תרגילים:

1. מצאו קבוצות A, B כך ש־:

	$A \in B$	$A \notin B$
$A \subseteq B$	$A = \{1,0\}, B = \{1, 0, \underbrace{\{0,1\}}_{A}\}$	$A = B = \{1,0\}$
$A \nsubseteq B$	$A = \{1,0\}, B = \{\{0,1\}\}$	$A = \{1\}, B = \{2\}$

2. הקבוצה הריקה היא הקבוצה שאין בה איברים, מסומנת: $\{\} = \emptyset$. נגדיר $A = \{\emptyset\}, B = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. רשמו נכון/לא נכון:

(א) $\emptyset \subseteq B$: נכון. הקבוצה הריקה מוכלת בכל קבוצה.

(ב) $\emptyset \in \emptyset$: לא נכון, בקבוצה הריקה אין איברים.

(ג) $\emptyset \subseteq \emptyset$: נכון. הקבוצה הריקה מוכלת בכל קבוצה, גם בקבוצה הריקה.

(ד) $A \subseteq B$: נכון, האיבר היחיד שיש ב־A נמצא גם ב־ B.

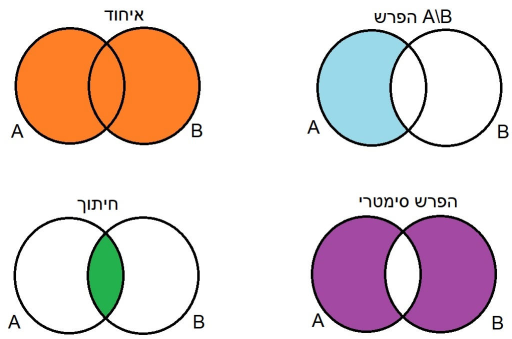
(ה) $A \in B$: נכון. אחד האיברים ב־B הוא $A = \{\emptyset\}$.

2 פעולות בין קבוצות

נגדיר בזריזות פעולות בין קבוצות באופן הבא:

- איחוד:

$$x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B$$



איור 1:

- חייתוך:

$$x \in A \cap B \iff x \in A \wedge x \in B$$

- הפרש:

$$x \in A \setminus B \iff x \in A \wedge x \notin B$$

- הפרש סימטרי:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

נחזור לתרגיל הקודם:
האם $A \cup B = B$? כן, כי $A \subseteq B$. בדומה $A \cap B = A$.
האם $A \cap B = \emptyset$? לא, יש איבר בחיתוך, והוא $\emptyset$.
תרגילים:

1. נגדיר $A = \{1, 2, \{1, 2\}\}, B = \{1, \{2\}\}, C = \{2, \{1, 2\}\}$. חשבו את הבאים:
   (א) $A \cap B = \{1\}$
   (ב) $B \cap C = \emptyset$
   (ג) $A \cup C = \{1, 2, \{1, 2\}\} = A$

(ד) $\{1,\{2\},2,\{1,2\}\} = B\Delta C = B\Delta\underbrace{(A\cap C)}_{C}$. נשים לב שכיון הש־ $B\cap C=\emptyset$,
אז נקבל: $B\Delta C = (B\cup C)\setminus(B\cap C) = B\cup C$.

2. הוכיחו או הפריכו:

(א) לכל 3 קבוצות A,B,C מתקיים:

$$A\cap(B\setminus C) = (A\cap B)\setminus(A\cap C)$$

(ב) לכל 3 קבוצות A,B,C מתקיים:

$$A\setminus(B\cap C) = (A\setminus B)\cap(A\setminus C)$$

פתרון: א. הוכחה: נוכיח בעזרת הכלה דו־כיוונית.
$\subseteq$: יהי $x\in A\cap(B\setminus C)$, לכן $x\in A\wedge x\in B\setminus C$, ולכן $x\in A\wedge(x\in B\wedge x\notin C)$. "וגם" הוא קיבוצי ולכן נקבל $(x\in A\wedge x\in B)\wedge x\notin C$. לכן נקבל $x\in A\cap B\wedge x\notin C$. נשים לב ש־ $x\notin C$ זהו תנאי מספיק לכך ש־ $x\notin A\cap C$, ולכן בסה"כ נקבל $x\in A\cap B\wedge x\notin A\cap C$ מה שאומר: $x\in(A\cap B)\setminus(A\cap C)$.
$\supseteq$: יהי $x\in(A\cap B)\setminus(A\cap C)$, מההגדרה נקבל $x\in A\cap B\wedge x\notin A\cap C$, ולכן (שימו לב לדה־מורגן): $(x\in A\wedge x\in B)\wedge(x\notin A\vee x\notin C)$. מחוק הפילוג נקבל:

$$\underbrace{((x\in A\wedge x\in B)\wedge x\notin A)}_{F}\vee((x\in A\wedge x\in B)\wedge x\notin C)$$

כיון ש־ $F\vee p\equiv p$ נקבל $(x\in A\wedge x\in B)\wedge x\notin C$, ולפי חוק הקיבוץ נקבל $x\in A\wedge(x\in B\wedge x\notin C)$ מה שאומר $x\in A\cap(B\setminus C)$.
ב. הפרכה: צריך למצוא דוגמא לקבוצות A,B,C שהשיוויון לא מתקיים. ניקח: $A=C=\{1\}, B=\{2\}$, ואז

$$(A\setminus B)\cap(A\setminus C) = (A\setminus B)\cap\emptyset = \emptyset \neq \{1\} = A = A\setminus\emptyset = A\setminus(B\cap C)$$

2.1 משלים

המשלים של קבוצה A זה אוסף האיברים שאינם ב־A. פה צריך להיזהר. כיון שאין לנו קבוצה שבה "כל האיברים", כדיי לומר כל האיברים שאינם ב־A צריך לומר קודם היכן הם

כן נמצאים. לכן כדי לדבר על משלים צריך להגיד "משלים ב־", ולצורך כך מגדירים קבוצה אוניברסלית לדיון, ומסומנת בד"כ U. אם $A \subseteq U$ אז מגדירים $A^c = \overline{A} = U \setminus A = \{x | x \in U \wedge x \notin A\}$.

תרגיל: תהי U קבוצה. הוכיחו שלכל שתי קבוצות $A, B \subseteq U$ מתקיים: $A \Delta B = \overline{A} \Delta \overline{B}$.

הוכחה: בעזרת שקילויות לוגיות:

$$x \in A\Delta B \iff (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \iff \underbrace{(x \notin \overline{A} \wedge x \in \overline{B})}_{=(x \in \overline{B} \wedge x \notin \overline{A})} \vee \underbrace{(x \notin \overline{B} \wedge x \in \overline{A})}_{=(x \in \overline{A} \wedge x \notin \overline{B})}$$

המשך השקילויות נובעות מחילופיות "וגם" ו "או":

$$\iff (x \in \overline{A} \wedge x \notin \overline{B}) \vee (x \in \overline{B} \wedge x \notin \overline{A}) \iff x \in \overline{A} \Delta \overline{B}$$

2.2 איחודים וחיתוכים כלליים

אם I קבוצה, ולכל $i \in I$ A_i היא קבוצה. אנחנו רוצים לאחד את כל ה־ A_i־ים, או לחתוך אותם. ההגדרה:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x | \exists i \in I x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x | \forall i \in I x \in A_i\}$$

כללי דה־מורגן לקבוצות:

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$$

$$\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$$

תרגילים:

1. לכל $n > 1$ טבעי נגדיר את A_n להיות קבוצת הראשוניים המחלקיים את n. חשבו:
   (א) $A_2 \cap A_{10} = \{2\}$
   (ב) $\bigcup_{n=2}^{15} A_n = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$
   (ג) $\bigcap_{n=2}^{6} A_{6n} = \{2, 3\}$
   (ד) $\bigcup_{n>1} A_n$ זוהי קבוצת הראשוניים.

(ה) $\bigcap\limits_{n>1} A_{2^n} = \{2\}$

2. לכל $n \geq 0$ שלם נגדיר $A_n = (n, n+1) \cup (-(n+1), -n)$. כאשר $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.

(א) חשבו $\bigcap\limits_{n\geq 0} A_n =$

(ב) חשבו $\bigcup\limits_{n\geq 0} A_n =$

(ג) נגדיר $B_n = \mathbb{R} \setminus A_n$. חשבו את $\bigcap\limits_{n\geq 0} B_n$.

פתרון: א. טענה: $\bigcap\limits_{n\geq 0} A_n = \emptyset$. הוכחה: מספיק להראות $A_0 \cap A_1 = \emptyset$, ואכן נניח בשלילה $x \in A_0 \cap A_1$. מכיון ש־ $x \in A_0$ אז $-1 < x < 1$, בסתירה לכך ש־ $x \in A_1$ מה שאומר בפרט $x > 1$ או $x < -1$.

ב. טענה: $\bigcup\limits_{n\geq 0} A_n = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. הוכחה בעזרת הכלה דו־כיוונית:

$\subseteq$: $x \in \bigcup\limits_{n\geq 0} A_n$ אז יש n_0 כך ש־ $x \in A_{n_0}$, ולכן $n_0 < x < n_0 + 1 \vee -(n_0 + 1) < x < -n_0$. בפרט מתקיים ש־ $x \in \mathbb{R}$ וכן ש־ $x \notin \mathbb{Z}$, כי אין שלמים בטווחים הנ"ל.

$\supseteq$: $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. צריך למצוא n_0 כך ש־ $x \in A_{n_0}$. נסמן $n_0 = |\lfloor x \rfloor|$ כלומר, הטבעי הגדול ביותר שקטן מ־x (עיגול לשלם כלפי מטה) בערך מוחלט. ואז נקבל $x \in A_{n_0}$.

ג. נגדיר את הקבוצה האוניברסלית לצורך הדיון להיות $\mathbb{R}$, ולכן נקבל:

$$\bigcap_{n\geq 0} B_n = \bigcap_{n\geq 0} (\mathbb{R} \setminus A_n) = \bigcap_{n\geq 0} \overline{A_n} = \overline{\bigcup_{n\geq 0} A_n} = \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}} = \overline{\overline{\mathbb{Z}}} = \mathbb{Z}$$