גאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית $88-201$
פתרון מועד א' קיץ תשע"ג 5773

21 באוגוסט 2014

1. נתונה עקומה $\gamma(t)$ ב-$\mathbb{R}^3$ שאינה עוברת בראשית. תהי $\gamma(t_0)$ הנקודה על העקומה הקרובה ביותר לראשית הצירים. הוכיחו: $\gamma(t_0)\perp\gamma'(t_0)$

פתרון

$$\begin{aligned} d(0,\gamma(t)) &= ||\gamma(t)||^2=\gamma(t)\cdot\gamma(t) \\ 0=\frac{d}{dt}\left(\gamma(t)^2\right)\Big|_{t_0} &= 2\gamma'(t)\,\gamma(t)|_{t_0} \end{aligned}$$

2. המשטח $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|z=x^2-y^2\right\}$ מתואר ע"י הפרמטריזציה

$$r(u,v)=(u+v,u-v,f(u,v))$$

(א) מצאו את $f(u,v)$ כך שהפרמטריזציה הנ"ל מתארת את המשטח S.

(ב) הראו כי הפרמטריזציה רגולרית.

(ג) חשבו את עקמומיות גאוס של המשטח.

פתרון

(א)

$$z=f(u,v)=x^2-y^2=(u+v)^2-(u-v)^2=4uv$$

(ב)

$$dr=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\\4v&4u\end{pmatrix}$$

(ג)

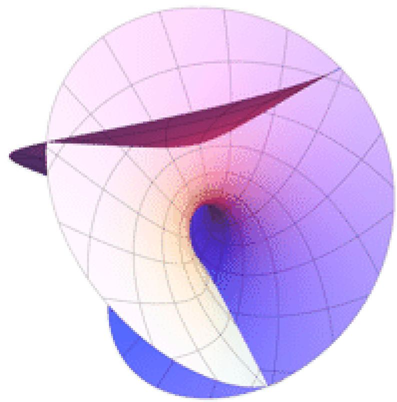
$$
\begin{aligned}
g &= dr^t dr = \begin{pmatrix} 2+16v^2 & 16uv \\ 16uv & 2+16u^2 \end{pmatrix} \\
n &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & 1 & 4v \\ 1 & -1 & 1u \end{vmatrix} = \hat{x}4(u+v) + \hat{y}4(v-u) - 2\hat{z}
\end{aligned}
$$

$$
r_{uu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad r_{vv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad r_{uv} = r_{vu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{n} &= \frac{1}{\sqrt{32(u^2+v^2)+4}} \begin{pmatrix} 4(u+v) \\ 4(v-u) \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{8(u^2+v^2)+1}} \begin{pmatrix} 2(u+v) \\ 2(v-u) \\ -1 \end{pmatrix} \\
B &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{-4}{\sqrt{8(u^2+v^2)+1}} \\ \frac{-4}{\sqrt{8(u^2+v^2)+1}} & 0 \end{pmatrix} \\
\kappa &= \frac{\det B}{\det G} = \frac{-\frac{16}{8(u^2+v^2)+1}}{(2+16v^2)(2+16u^2) - 256u^2v^2} \\
&= \frac{-16}{(8(u^2+v^2)+1)(4+32v^2+32u^2)} \\
&= \frac{-4}{(8u^2+8v^2+1)^2}
\end{aligned}
$$

3. חשבו את העקמומיות הממוצעת של משטח אמנפר:

$$
r(u,v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2\right)
$$



פתרון

$$
\begin{aligned}
dr &= \begin{pmatrix} 1-u^2+v^2 & 2uv \\ 2uv & 1-v^2+u^2 \\ 2u & -2v \end{pmatrix} \\
G &= \begin{pmatrix} \left(1-u^2+v^2\right)^2+4u^2v^2+4u^2 & 0 \\ 0 & \left(1-v^2+u^2\right)^2+4u^2v^2+4v^2 \end{pmatrix} \\
g_{11} &= 1+u^4+v^4-2u^2+2v^2-2u^2v^2+4u^2v^2+4u^2 \\
&= \left(1+u^2+v^2\right)^2 \\
G &= \left(1+u^2+v^2\right)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
n &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1-u^2+v^2 & 2uv & 2u \\ 2uv & 1-v^2+u^2 & -2v \end{vmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -4uv^2-2u\left(1-v^2+u^2\right) \\ 4u^2v+2v\left(1-u^2+v^2\right) \\ \left(1-u^2+v^2\right)\left(1-v^2+u^2\right)-4u^2v^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2u\left(1+u^2+v^2\right) \\ 2v\left(1+u^2+v^2\right) \\ \left(1+\left(u^2+v^2\right)\right)\left(1-\left(u^2+v^2\right)\right) \end{pmatrix} \\
\hat{n} &= \frac{1}{\left(1+\left(u^2+v^2\right)\right)\sqrt{4u^2+4v^2+\left(1-\left(u^2+v^2\right)\right)^2}} \begin{pmatrix} -2u\left(1+u^2+v^2\right) \\ 2v\left(1+u^2+v^2\right) \\ \left(1+\left(u^2+v^2\right)\right)\left(1-\left(u^2+v^2\right)\right) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{1+u^2+v^2} \begin{pmatrix} -2u \\ 2v \\ 1-u^2-v^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
r_{uu} = \begin{pmatrix} -2u \\ 2v \\ 2 \end{pmatrix} \qquad r_{vv} = \begin{pmatrix} 2u \\ -2v \\ 2 \end{pmatrix} \qquad r_{uv} = \begin{pmatrix} 2v \\ 2u \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{1}{1+u^2+v^2} \begin{pmatrix} 2\left(1+u^2+v^2\right) 0 & \\ 0 & -2\left(1+u^2+v^2\right) \\ 3 & \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\
S = G^{-1}B &= \frac{1}{\left(1+u^2+v^2\right)^2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\
\mathrm{tr} S &= 0
\end{aligned}
$$

4. תהי $\gamma(t) = (\cos t + \cos 2t, \sin t - \sin 2t)$ עקומה $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

(א) חשבו את העקמומיות κ בנקודה $(2, 0)$.

(ב) מצאו את משוואת המעגל המשיק בנקודה $(2, 0)$.

(ג) חשבו את $\int_\gamma \kappa ds$

פתרון

(א)

$$\begin{aligned}
\hat{T} &= \frac{1}{\sqrt{(\sin t + 2\sin 2t)^2 + (\cos t - 2\cos 2t)^2}} \begin{pmatrix} -\sin t - 2\sin 2t & \cos t - 2\cos 2t \end{pmatrix} \\
s &= \int \sqrt{(\sin t + 2\sin 2t)^2 + (\cos t - 2\cos 2t)^2} dt \\
&= \int \sqrt{5 + 4(\sin t \sin 2t - \cos t \cos 2t)} dt \\
&= \int \sqrt{5 - 4\cos 3t} dt \\
\hat{T} &= \frac{1}{\sqrt{5 - 4\cos 3t}} \begin{pmatrix} -\sin t - 2\sin 2t \\ \cos t - 2\cos 2t \end{pmatrix} \\
\gamma(0) &= (2, 0) \\
\left|\left|\dot{T}\right|\right|_{t=0} &= 5 \\
\kappa &= -5
\end{aligned}$$

(ב) נראה שהוקטור המשיק בנקודה $t = 0$ כלומר $(2, 0)$ הוא בכיוון $(0, -1)$ וכיוון שמרכז המעגל המשיק בכיוון $\hat{N}$שהוא פה $(-1, 0)$אז מרכז המעגל הוא $p = (2, 0) + \frac{1}{5}(-1, 0) = \left(\frac{9}{5}, 0\right)$ והרדיוס הוא $\left|\frac{1}{\kappa}\right| = \frac{1}{5}$ כלומר:

$$\left(x - \frac{9}{5}\right) + y^2 = \left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 = \frac{1}{25}$$

(ג) ראינו בהרצאה שאינטגרל על κ על עקומה סגורה חלקה הוא מספר ההקפות של הוקטור המשיק סביב ראשית הצירים כפול 2π (סימן ההקפות נחשב).

$$\int_\gamma \kappa ds = (2\pi) \cdot (-2)$$

5. נתון העקום $\gamma(s)$ ב$\mathbb{R}^2$, הנתון בפרמטריזציה טבעית, המקיים $\gamma(0)=(0,0)\,,\gamma(2)=(1,0)$. הוכיחו: קיימת נקודה $s_0\in[0,2]$ כך שהעקמומיות של γ בנקודה s_0 היא לפחות $|\kappa(s_0)|\geq\frac{\pi}{6}$.

פתרון

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^2\dot\gamma(0)\cdot\dot\gamma(s)\,ds\right| &= \left|\dot\gamma(0)\int_0^2\dot\gamma(s)\,ds\right| \\
&= \left|\hat T\cdot(1,0)\right| \\
&\leq \left|\left|\hat T\right|\right|\,||(1,0)||=1 \\
1 &\geq \int_0^2\dot\gamma(0)\cdot\dot\gamma(s)\,ds \\
&= \int_0^2\cos\left(\alpha(s)-\alpha(0)\right)ds \\
\Rightarrow\exists s\in[0,2] &: \cos\left(\alpha(s)-\alpha(0)\right)\leq\frac{1}{2} \\
\left|\underbrace{\alpha(s)-\alpha(0)}_{f(s)}\right| &\geq \frac{\pi}{3} \\
f(0) &= \alpha(0)-\alpha(0)=0 \\
f(s) &\geq \frac{\pi}{3} \\
\exists s_1 &: f'(s_1)=\frac{f(s)-f(0)}{s-0}=\frac{f(s)}{s}\geq\frac{\frac{\pi}{3}}{2}=\frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$