מבנים אלגבריים

תרגיל בית $5\frac{1}{2}$

9 בדצמבר 2012

1. יהי $\varphi : G \to H$ הומומורפיזם של חבורות. הראו כי $\varphi : G \to \mathrm{Im}H$ הוא על.
2. יהי $\phi : G \mapsto H$ איזומורפיזם של חבורות. הוכח: $\phi^{-1} : H \mapsto G$ אף הוא איזומורפיזם של חבורות.
3. מיינו את כל החבורות שהסדר שלהן קטן מ־5, עד כדי איזומורפיזם.
4. יהי $\varphi : G \to H$ הומומורפיזם של חבורות.
   (א) הראו כי לכל $g \in G$, הסדר של $\varphi(g)$ מחלק את הסדר של g.
   (ב) נניח כי φ איזומורפיזם. הראו כי $o(g) = o(\varphi(g))$.
5. האם קיים הומומורפיזם לא־טריוויאלי (שונה מההומומורפיזה ששולח את כולם ליחידה) $\phi : \mathbb{Z}_{30} \to \mathbb{Z}_{11}$?
6. יהי $\phi : G \mapsto H$ איזומורפיזם של חבורות. לכל ת"ח $N \leq G$ נסמן

   $$\phi(N) := \{\phi(n) : n \in N\}.$$

   הוכח: N נורמלית ב G, אם ורק אם $\phi(N)$ נורמלית ב H.
7. ענו על השאלות הבאות:
   (א) האם $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ ציקלית?
   (ב) האם $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ ציקלית?
   (ג) האם $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$ ציקלית?
8. יהיו m, n מספרים זרים. הראו כי $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ ציקלית, ואיזומורפית ל־$\mathbb{Z}_{mn}$.
9. תהי C_n חבורה ציקלית מסדר n. (הוכחנו בתרגיל שכולן איזומורפיות ל $\mathbb{Z}_n$).
   (א) הראו: לכל $m \mid n$, קיימת תת־חבורה יחידה מסדר m.
   (ב) מה הם היוצרים של C_n? כמה יוצרים שונים יש?
10. מצאו אילו מהחבורות הבאות איזומורפיות זו לזו: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_8$.
11. נביט בחבורת הסימטריה S_n.

(א) יהי τ מחזור מאורך k, ויהי σ חילוף. הראו כי $\sigma\tau\sigma$ הוא מחזור מאורך k.

(ב) תהי μ תמורה. הראו כי $\mu\tau\mu^{-1}$ מחזור מאורך k. רמז: כל תמורה ניתנת לרישום כמכפלה של חילופים.

(ג) הראו כי מתקיים

$$\mu\left(a_{1}\,\ldots\,a_{k}\right)\mu^{-1}=\left(\mu\left(a_{1}\right)\,\ldots\,\mu\left(a_{n}\right)\right)$$

(ד) הראו שחבורת קיילי, $K_4=\{id,\,(12)(34),\,(13)(24),\,(14)(23)\}$ היא תת־חבורה נורמלית של S_4.

12. תהי G חבורה, ותהי $X\subseteq G$ תת־קבוצה. נתנו שתי הגדרות לתת־החבורה הנוצרת על ידי X. הגדרנו כי $\langle X\rangle$ היא חבורת כל המכפלות הסופיות (חיוביות או שליליות) של איברי X. בנוסף הגדרנו את $\langle X\rangle$כחיתוך של כל התת־חבורות $H\leq G$ אשר מכילות את X. הראו כי ההגדרה הראשונה גוררת את השנייה.

13. תהי G חבורה, ותהי $X\subseteq G$ תת־קבוצה. נגדיר התת־חבורה הנורמלית של G הנוצרת על ידי X באופן הבא: זהו חיתוך כל התת־חבורות הנורמליות של G המכילות את X. בנוסחא נרשום זאת

$$H=\bigcap_{X\subseteq N\trianglelefteq G}N$$

(א) הראו כי H היא תת־חבורה נורמלית של G.

(ב) הוכיחו כי H היא התת־חבורה הנוצרת על ידי $\left\{gxg^{-1}:g\in G,x\in X\right\}$.