חשבון אינפי 1
תרגיל 1- פתרון

1. מצאו את משוואת המעגל העובר דרך הנקודות $(3,0)$, $(1,-2)$, $\left(2,\sqrt{3}-2\right)$.

פתרון:

משוואה כללית של מעגל עם מרכז בנקודה (h,k) ובעל רדיוס r :

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

הנקודות $(3,0)$, $(1,-2)$, $\left(2,\sqrt{3}-2\right)$ מקיימות את משוואת המעגל ולכן:

$$(3-h)^2+k^2=r^2 \qquad (1)$$

$$(1-h)^2+(-2-k)^2=r^2 \qquad (2)$$

$$(2-h)^2+\left(\sqrt{3}-2-k\right)^2=r^2 \qquad (3)$$

נחסר משוואה (2) ממשוואה (1) ונקבל $h+k=1$

נחסר משוואה (2) ממשוואה (3) ונקבל $3-2\sqrt{3}-h-\sqrt{3}k=0$

ממשוואה $h+k=1$ נקבל $k=1-h$ נציב במשוואה $3-2\sqrt{3}-h-\sqrt{3}k=0$.

ממשוואה אחרונה נקבל $h=3$ ומכאן $k=-2$ ו- $r=2$.

לסיכום משוואת המעגל המבוקש הינה: $(x-3)^2+(y+2)^2=4$

2. הוכיחו כי לכל $x,y\in\mathbb{R}$ מתקיים $|x-y|\ge\big||x|-|y|\big|$.

פתרון: נחלק ל- 3 מקרים:

א. $x\ge 0$ וגם $y\ge 0$ וכן נניח בה"כ $x\ge y\ge 0$

במקרה זה $x-y\ge 0$ וכן $|x|-|y|\ge 0$ ולכן

$|x-y|=x-y=|x|-|y|=\big||x|-|y|\big|$ כדרוש.

ב. $x\le 0$ וגם $y\le 0$ וכן נניח בה"כ $x\le y\le 0$ במקרה זה $x-y\le 0$ וכן $|x|-|y|\ge 0$ ולכן

$|x-y|=-x+y=|x|-|y|=\big||x|-|y|\big|$ כדרוש.

ג. נניח בה"כ $x\ge 0$ ו- $y\le 0$. במקרה זה $x-y\ge 0$:

אם $|x|\ge|y|$ נקבל $|x|-|y|\ge 0$ ולכן $\big||x|-|y|\big|=|x|-|y|$

ומכאן $|x-y|=x-y=|x|+|y|\ge|x|-|y|=\big||x|-|y|\big|$ כדרוש.

אם $|x|\le|y|$ נקבל $|x|-|y|\le 0$ ולכן $\big||x|-|y|\big|=|y|-|x|$

ומכאן $|x-y|=x-y=|x|+|y|\ge|y|-|x|=\big||x|-|y|\big|$ כדרוש.

3. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{3}{|6x|-|4x-1|-|2x+1|}$

פתרון:

הפונקציה מוגדרת לכל $x\in\mathbb{R}$ כך ש- $|6x|-|4x-1|-|2x+1|\neq 0$

$6x=0\Rightarrow x=0$

$4x-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{4}$

$2x+1=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$

שלוש הנקודות הנ"ל מחלקות את הציר הממשי ל-4 קטעים:

1. $x\le -\frac{1}{2}$
2. $-\frac{1}{2}<x\le 0$
3. $0<x\le \frac{1}{4}$
4. $x>\frac{1}{4}$

נפתור את המשוואה $|6x|-|4x-1|-|2x+1|=0$ בכל אחד מ-4 הקטעים:

1. אם $x\le -\frac{1}{2}$ נקבל $-6x+4x-1+2x+1=0$ ומכאן $0=0$, כלומר כל $x\le -\frac{1}{2}$ פותר את המשוואה, כלומר כל הנקודות הנ"ל אינן שייכות לתחום ההגדרה של הפונקציה.
2. אם $-\frac{1}{2}<x\le 0$ נקבל $-6x+4x-1-2x-1=0$ ולכן $x=-\frac{1}{2}$ ונקודה זו לא שייכת לקטע $-\frac{1}{2}<x\le 0$ ולכן בקטע זה אין נקודות שאינן שייכות לחתום ההגדרה של הפונקציה.
3. אם $0<x\le \frac{1}{4}$ נקבל $6x+4x-1-2x-1=0$ ולכן $x=\frac{1}{4}$, כלומר $x=\frac{1}{4}$ לא שייכת לתחום ההגדרה של הפונקציה.
4. אם $x>\frac{1}{4}$ נקבל $6x-4x+1-2x-1=0$ ומכאן $0=0$, כלומר כל הנקודות בקטע $x>\frac{1}{4}$ אינן שייכות לתחום ההגדרה של הפונקציה.

לסיכום:

$$D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{4}\right\}$$

ב. $f(x)=\sqrt{|-2x+5|^{3x^2-6x+2}-\frac{1}{|-2x+5|}}$

פתרון:

הפונקציה מוגדרת לכל $x\in\mathbb{R}$ כך ש- $|-2x+5|^{3x^2-6x+2}-\frac{1}{|-2x+5|}\geq 0$ ו- $-2x+5\neq 0$

שני התנאים הנ"ל מתקיימים אם ורק אם $\begin{cases}|-2x+5|^{3x^2-6x+3}-1\geq 0\\ -2x+5\neq 0\end{cases}$

$\begin{cases}|-2x+5|^{3(x-1)^2}\geq 1\\ x\neq \frac{5}{2}\end{cases}$.

מאחר ומעריך החזקה אי שלילי לכל $x\in\mathbb{R}$, נקבל $|-2x+5|^{3(x-1)^2}\geq 1$ אם ורק אם $|-2x+5|\geq 1$ ולכן לפי תכונות הערך המוחלט: $-2x+5\geq 1$ או $-2x+5\leq -1$.

ולכן נקבל $x\leq 2$ או $x\geq 3$.

לסיכום: $D(f)=\{x\in\mathbb{R}|x\leq 2\ or\ x\geq 3\}$.

4. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות ושרטטו את התחום במישור :

א. $f(x,y)=(x^2+1)\sqrt{-x^2+4x-y^2-2x-1}$

פתרון:

הפונקציה מוגדרת לכל $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ כך ש- $-x^2+4x-y^2-2x-1\geq 0$

נשלים לריבוע ונקבל $-x^2+4x-4-y^2-2x-1+4\geq 0$, כלומר

$(x-2)^2+(y+1)^2\leq 2^2$.

$D(f)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\middle|(x-2)^2+(y+1)^2\leq 2^2\right\}$ וזהו עיגול עם מרכז בנקודה $(2,-1)$

ובעל רדיוס $r=2$ כולל המעגל.

ב. $f(x,y)=\frac{\sqrt{-x^2y}}{1-x+y}$

פתרון:

הפונקציה מוגדרת לכל $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ כך ש- $\begin{cases}-x^2y\geq 0\\ 1-x+y\neq 0\end{cases}$

המערכת האחרונה מתקיימת אם ורק אם $\begin{cases}x=0\\ y\neq -1\end{cases}$ or $\begin{cases}y\leq 0\\ 1-x+y\neq 0\end{cases}$

כלומר זהו חצי מישור תחתון כולל ציר ה- x למעט הישר $y=x-1$ עבור $x\le 1$ או ציר ה- y כולו למעט הנקודה $(0,-1)$.