מבוא לאלגברה לינארית -פתרון תרגיל 11 - ממפ

תרגיל 1. הוכיחו ש- $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i y_i$ עבור $\alpha_i > 0$ היא מכפלה פנימית מעל $V = \mathbb{R}^n$. שימו לב שאם לוקחים $\alpha_i = 1$ אז מקבלים את המכפלה הפנימית הסטנדרטית

פתרון. כדי להוכיח ש- $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i y_i$ היא מכפלה פנימית יש להוכיח 3 תכונות (לינארית ברכיב הראשון, הרמיטיות, אי-שליליות)

1. לינאריות:

$$
\begin{aligned}
\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right\rangle &= \\
\left\langle \begin{pmatrix} x_1 + cy_1 \\ x_2 + cy_2 \\ \vdots \\ x_n + cy_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right\rangle & \\
\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(x_i + cy_i\right) z_i &= \\
\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i z_i + c \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c y_i z_i &= \\
\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right\rangle + c \left\langle \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right\rangle &
\end{aligned}
$$

2. הרמיטיות (סימטריות):

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i x_i = \left\langle \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\rangle$$

3. אי-שליליות

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2 \geq 0$$

ומתקיים

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2 = 0 \Leftrightarrow \forall i : x_i = 0$$

תרגיל 2. הוכיחו שמתקיים $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.
שוויון זה נקרא כלל המקבילית כי מבחינה גאומטרית הוא הקובע שבמקבילית סכום ריבועי ארבע צלעות שווה לסכום ריבועי האלכסונים.

פתרון. נתחיל מאגף שמאל ונגיע לאגף ימין

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle + \langle x-y, x-y \rangle \\ &= \langle x,x \rangle + \langle y,x \rangle + \langle x,y \rangle + \langle y,y \rangle + \langle x,x \rangle + \langle -y,x \rangle + \langle x,-y \rangle + \langle -y,-y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \langle y,x \rangle + \langle x,y \rangle + \|y\|^2 + \|x+y\|^2 - \langle y,x \rangle - \langle x,y \rangle + \|-y\|^2 \\ &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \end{aligned}$$

תרגיל 3. עבור S הנתונה מצא את $S^\perp$

.1 $$S=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$$

פתרון. נחשב את $S^\perp$ כמו שראינו בכיתה

$$\begin{aligned}
S^\perp &= \\
&= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \middle| \begin{cases}\left\langle\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\rangle=0\\ \left\langle\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}\right\rangle=0\end{cases}\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \middle| \begin{cases}x+2y+z=0\\ -x+2z=0\end{cases}\right\} \\
&= N\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&0&2\end{pmatrix} \\
&= N\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&3\end{pmatrix} \\
&= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \middle| \begin{cases}x=2t\\ y=-\frac{3}{2}t\\ z=t\end{cases}\right\} \\
& span\left\{\begin{pmatrix}4\\-3\\2\end{pmatrix}\right\}
\end{aligned}$$

ואכן מתקיים

$$\begin{cases}\left\langle\begin{pmatrix}4\\-3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\rangle=0\\ \left\langle\begin{pmatrix}4\\-3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}\right\rangle=0\end{cases}$$

.2 $$S=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

פתרון. נחשב את $S^\perp$ כמו שראינו בכיתה

$$
\begin{aligned}
S^{\perp} &= \\
\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\} &= \\
\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 0 = 0 \right\} &= \\
\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\} &= \\
\mathbb{R}^3
\end{aligned}
$$

ואכן כל הווקטורים "מאונכים" לווקטור ה-0 כי המכפלה הפנימית של ווקטור ה-0 עם כל ווקטור שווה ל-0.

.3 $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

פתרון. נחשב את $S^{\perp}$ כמו שראינו בכיתה

$$S^\perp =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \middle| \left\{ \begin{array}{c} \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\ \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \end{array} \right. \right\} =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \middle| \left\{ \begin{array}{c} x - z + 2w = 0 \\ y + 2z = 0 \end{array} \right. \right\} =$$

$$N \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \middle| \left\{ \begin{array}{c} x = s - 2t \\ y = -2s \\ z = s \\ w = t \end{array} \right. \right\} =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} s - 2t \\ -2s \\ s \\ t \end{pmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ואכן מתקיים

$$\left\{ \begin{array}{c} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\ \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \end{array} \right.$$

ו-

$$\begin{cases} \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\ \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \end{cases}$$

תרגיל 4. יהיו $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ו-$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

1. הוכיחו שאוסף כל הווקטורים ב-$\mathbb{R}^4$ האורתוגונלים לשני הווקטורים האלו הוא תתי מרחב של $\mathbb{R}^4$.

פתרון. כדי להוכיח ש-$S^{\perp}$ הוא תת מרחב צריך להוכיח שני תכונות

(א) שייכות של 0: $\langle v_1, 0\rangle = 0, \langle v_2, 0\rangle = 0$ לכן $0 \in S^{\perp}$

(ב) סגירות: יהיו $w_1, w_2 \in S^{\perp}$ צריך להוכיח ש-

$$\begin{cases} \langle w_1 + \alpha w_2, v_1\rangle = 0 \\ \langle w_1 + \alpha w_2, v_2\rangle = 0 \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} \langle w_1, v_1\rangle + \alpha \langle w_2, v_1\rangle = 0 \\ \langle w_1, v_2\rangle + \alpha \langle w_2, v_2\rangle = 0 \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} 0 + \alpha 0 = 0 \\ 0 + \alpha 0 = 0 \end{cases}$$

2. מצאו בסיס לתת מרחב הזה.

פתרון. .נסמן את אוסף הווקטורים הללו ב-V אז מתקיים

$$\begin{aligned} W &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, v_1 \right\rangle = 0 \wedge \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, v_1 \right\rangle = 0 \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \wedge \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| \begin{cases} x + y + w &= 0 \\ x + y + z + 2w &= 0 \end{cases} \right\} \end{aligned}$$

כלומר V הוא אוסף הפתרונות של מערכת הומוגנית כבר ראינו זה תת מרחב.

כדי למצוא בסיס נפתור את המערכת

$$\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\1&1&1&2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\0&0&1&1&0\end{pmatrix}$$

לכן

$$W=\left\{\left(\begin{array}{c}-t-s\\s\\-t\\t\end{array}\right)\middle|t,s\in\mathbb{R}\right\}=Span\left\{\left(\begin{array}{c}-1\\0\\-1\\1\end{array}\right),\left(\begin{array}{c}-1\\1\\0\\0\end{array}\right)\right\}$$

ו

$$B=\left\{\left(\begin{array}{c}-1\\0\\-1\\1\end{array}\right),\left(\begin{array}{c}-1\\1\\0\\0\end{array}\right)\right\}$$

היא קבוצה בתל ופורשת את W

תרגיל 5. (מאתגר מאוד) יהיה V ממ"פ, ו-$S=\{v_1,\ldots,v_n\}$ בסיס לת"מ W הוכיחו ש-$W^\perp=S^\perp$.

פתרון. נראה הכלה דו כיוונית:

- $W^\perp\subseteq S^\perp$: יהי $u\in W^\perp$ לכן לפי ההגדרה של $W^\perp$ מתקיים

$$u\in\{v\in V|\forall w\in W:\ \langle u,w\rangle=0\}$$

כיוון ש-$S\subseteq W$ זה מקיים בפרט לכל בווקטורים ב-S לכן

$$u\in\{v\in V|\forall v_i\in S:\ \langle u,v_i\rangle=0\}=S^\perp$$

- $W^\perp\supseteq S^\perp$: יהי $u\in S^\perp$ לכן לפי ההגדרה של $S^\perp$ מתקיים

$$u\in\{v\in V|\forall v_i\in S:\ \langle v_i,u\rangle=0\}$$

נראה u שייך גם ל- $W^\perp$, כלומר צריך להראות שלכל $w\in W$ מתקיים $\langle w,u\rangle=0$ ואכן מתקיים

$$\langle w,u\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^n\alpha_iv_i,u\right\rangle=\sum_{i=1}^n\alpha_i\langle v_i,u\rangle=0$$

לכן $u\in W^\perp$.

בהצלחה!!