(1) 27.10.13

שאלה בספר תרגול 3

<u>הגדרה:</u> תת קבוצה של מרחב נורמי E נקראת <u>קומפקטית</u> אם לכל סדרה $\{x_n\}_n \subseteq S$ מכילה תת סדרה שמתכנסת לאיבר ב S.

$$\left[\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0\right]$$

<u>הגדרה:</u> תת קבוצה S במרחב נורמי נקראת חסומה אם קיים r כך ש $S \subseteq B(0,r) = \{x\in E \mid \|x\|<r\}$.

<u>משפט:</u> אם $S\subseteq E$ תת קבוצה קומפקטית אז S סגורה וחסומה. וההפך נכון במקרה שהמימד של E הוא סופי. כלומר אם ל E יש מימד סופי אז $S\subseteq E$ סגורה וחסומה אמ"מ היא קומפקטית.

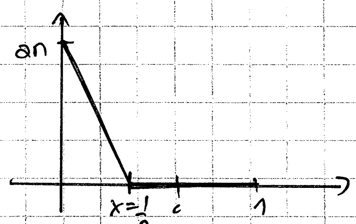
הערה - לכן ב $\mathbb{R}^n$ וב $\mathbb{C}^n$ כל קבוצה וחסומה היא קומפקטית, לא משנה איזו נורמה בוחרים.

<u>דוגמא:</u> נבחר את המרחב הנורמי $E = (C[0,1], L_1)$ $\quad \|f\|_{L_1} = \int_0^1 |f(t)|\,dt$

ואת תת הקבוצה $A = \overline{B(0,1)} \subseteq E$.

כלומר, $A = \{f\in E : \int_0^1 |f(t)|\,dt \le 1\}$

נראה ש A לא קומפקטית.



נבחר את הסדרה - $f_n(x) = \begin{cases} 2n(1-nx) & 0\le x\le \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n}\le x\le 1 \end{cases}$

לכל n, $\|f\|_{L_1} = \int_0^1 |f(t)|\,dt = 1$

(שטח המשולש)

נניח בשלילה שקיימת תת סדרה $\{f_{n_k}\}_k$ של $\{f_n\}$ המתכנסת לאיבר f של A.
נוכיח שבהכרח $f=0$.
נוכיח שלכל $c>0$, $f(x)=0$, $c\le x\le 1$, שזה שקול ל $\int_c^1 |f(x)|\,dx=0$

עבור c קבוע קיים k_0 כך ש $\frac{1}{n_{k_0}} < c$, ולכן עבור $k\ge k_0$, נקבל ש $f_{n_k}(x)=0$ כאשר $c\le x\le 1$. ולכן:

$$\int_c^1 |f(x)|\,dx = \int_c^1 |f(x) - f_{n_k}(x)|\,dx \le \int_0^1 |f(x)-f_{n_k}(x)|\,dx = \|f-f_{n_k}\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

לוקחים אינטרוול גדול יותר

ולכן $\int_0^1 |f(x)|\,dx = 0$ ולכן $f(x)=0$ $\forall\, 0\le x\le 1$

וזה נכון לכל $c>0$, ולכן $f=0$. ועכשיו נגיע לסתירה כי:

$$1 = \lim_{k\to\infty} \|f_{n_k}\|_{L_1} = \lim_{k\to\infty} \|f_{n_k} - \underset{f}{0}\| = 0$$

→ קיבלנו ש $1=0$ וזו סתירה

הראינו קודם (השטח)

$$\left[\lim_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f\| = 0\right]$$

(2) 27.10.13

שאלה פונ'
הרצאה 3

<u>הגדרה:</u> פונ' $f: E \to \mathbb{R}$ (E מרחב נורמי) נקראת <u>רציפה</u>

אם $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$ גורר ש $\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(x)| = 0$

[אם x_n שואף ל x, אז גם הערכים של f מאוד קרובים לערכה המוגדר]
[הכללה של פונ' רציפה מ $\mathbb{R}^n$ למימד אינסופי]

<u>תרגיל:</u> תהי $f: E \to \mathbb{R}$ פונ' רציפה ו $S \subseteq E$ תת קבוצה קומפקטית.

א. הראו ש f חסומה ב S
ב. בעזרת סעיף א' הראו ש f מקבלת את המקסימום והמינימום

<u>פתרון:</u> נניח בשלילה ש f לא חסומה.
?[נמצא סדרת נק' ב S שמתכנסת לאיזשהו איבר - ונראה שבגבול מקבלים ערכים סופיים]

~~נניח בשלילה ש f~~ לא

נבחר נק' $x_1 \in S$. קיימת נק' $x_2 \in S$ כך ש $f(x_2) \geq f(x_1) + 1$ וקיימת נק' $x_3 \in S$ כך ש $f(x_3) \geq f(x_2) + 1$.

באופן כללי, לכל n קיימת נק' x_n כך ש $f(x_n) \geq f(x_{n-1}) + 1$

ברקורסיה מקבלים ש $f(x_n) \geq n - 1 + f(x_1)$. (כי לא חסומה)

לסדרה $\{x_n\}$ יש תת סדרה $\{x_{n_k}\}$ שמתכנסת לאיבר $x_0 \in S$.

לכן $\lim_{k\to\infty} \|x_0 - x_{n_k}\| = 0$, ולכן $\lim_{k\to\infty} |f(x_0) - f(x_{n_k})| = 0$

$$f(x_0) = f(x_0) - f(x_{n_k}) + f(x_{n_k}) \geq f(x_0) - f(x_{n_k}) + n_k - 1 + f(x_1)$$

והאי שוויון נכון לכל k.
נשאיף את k לאינסוף -

$$f(x_0) \geq \lim_{k\to\infty} f(x_0) - f(x_{n_k}) + n_k - 1 + f(x_1)$$

$$\left[\begin{array}{l} a \geq a_k \\ a \geq \lim_{k\to\infty} a_k \end{array}\right] \qquad = \underbrace{\lim_{k\to\infty} f(x_0) - f(x_{n_k})}_{=0} + \lim_{k\to\infty} n_k - 1 + f(x_1) = \infty$$

ולכן $f(x_0) = \infty$