תרגיל 13

1. יהיו $(X,\tau),(Y,\sigma)$ מרחבים טופולוגיים ו־$f:X\to Y$. בנוסף, נניח ש־$\{A_i\}_{i=1}^n$ כיסוי סגור של X וש־$f(A_i)$ סגורה לכל $1\le i\le n$. אז אם $f_{|A_i}$ סגורה לכל $1\le i\le n$ אז f סגורה.
<u>פתרון</u>
תהי $S\subseteq X$ קבוצה סגורה, נראה ש־$f(S)$ סגורה. ראשית, נשים לב ש־
$$S:=\bigcup_{i=1}^{n}(S\cap A_i)\Rightarrow f(S)=\bigcup_{i=1}^{n}f(S\cap A_i)$$
בנוסף, $S\cap A_i$ סגורה כחיתוך של סגורות ולכן $f(S\cap A_i)\subseteq f(A_i)$ סגורה לכל $1\le i\le n$. לפי הגדרת טופולוגיית תת המרחב, קיימת קבוצה סגורה $T_i\subseteq Y$ כך ש־
$$f(S\cap A_i)=f(A_i)\cap T_i$$
מכאן ש־$f(S\cap A_i)$ סגורה כחיתוך של סגורות. לבסוף, $f(S)$ סגורה כאיחוד סופי של סגורות.

2. הוכיחו ש־$\mathbb{R}$ כאשר מכווצים את $[0,1]$ לנקודה עדיין הומיאומורפי ל־$\mathbb{R}$.
<u>פתרון</u>
נגדיר פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ על ידי
$$f(x):=\begin{cases}x & x\le 0\\ 0 & 0\le x\le 1\\ x-1 & x\ge 1\end{cases}$$
קל לראות שהפונקציה רציפה בכל תחומי ההגדרה שלה (שהם סגורים) וקוהרנטית בחיתוכים, ולכן רציפה לפי תרגיל מהתרגול. בנוסף, $\sim_f$ הוא בדיוק יחס השקילות שרצינו. לפי משפט הקריטריון למנה, אם נראה ש־f מנה אז $\mathbb{R}/\sim_f\cong Im\,f=\mathbb{R}$ כרצוי. נראה שהפונקציה הזו סגורה ולכן מנה. אכן, בכל תחומי ההגדרה שלה $((-\infty,0],[0,1],[1,\infty))$ קל לראות שהיא פונקציה סגורה (כהומיאומורפיזם או כפונקציה קבועה). לפי התרגיל הקודם f סגורה.

3. נסתכל על הגליל $X:=S\times[0,1]$ ונגדיר יחס $\sim$ על ידי
$$(x,\alpha)\sim(y,\beta)\iff \alpha=\beta=0\vee\Big(\alpha=\beta\wedge x=y\Big)$$
כלומר, מדביקים את נקודות הבסיס $S\times\{0\}$ יחד. הראו ש־$X/\sim$ הומיאומורפי לדיסק סגור דו ממדי.
<u>פתרון</u>

נסמן D עבור הדיסק הסגור הדו ממדי. נגדיר את הפונקציה $f : X \to D$ לפי

$$f(x, \alpha) := \alpha x$$

שימו לב שאנחנו מתייחסים ל־S כתת קבוצה של $\mathbb{R}^2$. ברור שהפונקציה רציפה ועל. בנוסף, קל לראות ש־$\sim_f$ הוא בדיוק ההדבקה שאנחנו רוצים. לפי משפט קריטריון המנה, אם נראה ש־f מנה אז

$$X/\sim_f \cong Im(f) = D$$

נשים לב ש־X קומפקטית כמכפלה של קומפקטיות ו־D האוסדורפית, לפי משפט f בהכרח סגורה ולכן f מנה.

4. יהי (X, τ) מרחב טופולוגי ו־$Y \subseteq X$. נגדיר רטרקציה (משיכה) כפונקציה רציפה $f : X \to Y$ כך שלכל $y \in Y$ מתקיים $f(y) = y$. הראו שכל רטרקציה רציפה היא מנה.
<u>פתרון</u>

אפשר להשתמש בקריטריון הצמצום עבור $Y \subseteq X$. נשים לב שלפי הנתון מתקיים ש־$f_{|Y} = id_Y$ ולכן $f_{|Y}$ היא הומיאומורפיזם. כל הומיאומורפיזם הוא מנה ולכן $f_{|Y}$ מנה. לבסוף, נפעיל את קריטריון הצמצום ונגלה ש־f מנה.

5. נגדיר יחס שקילות על הספירה

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

לפי

$$(x, y, z) \sim (x', y', z') \iff (x, y) = (x', y')$$

הראו ש־

$$S^2/\sim \cong D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

<u>פתרון</u>
נסתכל על ההטלה $f : S^2 \to D$ שמוגדרת לפי

$$f(x, y, z) := (x, y)$$

ראשית נשים לב ש־f רציפה כמכפלה של פונקציות רציפות (הטלות). נשאיר את זה כתרגיל לוודא ש־f היא אכן פונקציה לתוך D וגם שהיא על. בנוסף, $\sim_f$ הוא בדיוק יחס השקילות הרצוי. לפי משפט קריטריון המנה, אם נראה ש־f מנה אז

$$S^2/\sim_f \cong Im(f) = D$$

ואכן, S^2 קומפקטית (לפי היינה בורל) ו־D האוסדורפית אז לפי משפט f הינה סגורה. כל פונקציה סגורה היא מנה, כרצוי.

6. הראו ש־$\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$ היא פונקציית מנה.
<u>פתרון</u>

נשתמש בקריטריון הצמצום למנה. נסמן $A := [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \subseteq \mathbb{R}$. קל לראות ש־$f_{|A} : A \to [-1,1]$ היא פונקציה רציפה, חח"ע ועל. מכיוון ש־A קומפקטית ו־$[-1,1]$ האוסדורפית משפט השיכון אומר שזה הומיאומורפיזם. בפרט, $f_{|A}$ היא פונקציית מנה. לפי קריטריון הצמצום, f מנה גם היא.

7. נסתכל על $X = \{0,1\}$ עם טופולוגיית שרפינסקי $\tau = \{X, \emptyset, \{0\}\}$. נגדיר יחס שקילות $\sim$ על $I = [0,1]$ לפי

$$x \sim y \iff \Big(x, y \in [0, \frac{1}{2})\Big) \vee \Big(x, y \in [\frac{1}{2}, 1]\Big)$$

<u>פתרון</u>

נסתכל על הפונקציה $f : I \to X$ שמוגדרת לפי

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x < \frac{1}{2} \\ 1 & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

קל לוודא (יש רק 3 בדיקות) ש־f רציפה. בנוסף, היא בבירור על ומשרה את יחס השקילות הדרוש $\sim = \sim_f$. לפי משפט קריטריון המנה, אם f מנה אז $I/\sim_f \cong Im(f) = X$.
כדי לוודא ש־f מנה נעזר בהגדרה, כלומר שלכל קבוצה $O \subseteq X$ כך ש־$f^{-1}(O)$ פתוחה היא פתוחה. כאן ישנן 4 אפשרויות וכולן מתאמתות (כי $f^{-1}(\{1\}) = [\frac{1}{2}, 1]$ שאינה סגורה). לכן, f מנה כרצוי.

8. הוכיחו או הפריכו: כל פולינום $p : \mathbb{R} \to p(\mathbb{R})$ הוא פונקציית מנה.
<u>בונוס:</u> האם זה נכון גם מעל $\mathbb{C}$
<u>פתרון</u>

זה נכון גם מעל $\mathbb{R}$ וגם מעל $\mathbb{C}$. נראה שכל פולינום הוא סגור בשני המקרים. נסמן $\mathbb{F}$ עבור אחד השדות הללו. נניח ש־$A \subseteq \mathbb{F}$ קבוצה סגורה, נראה ש־$p(A)$ סגורה סדרתית. מכיוון ש־$\mathbb{F}$ הוא מרחב מטרי (בשני המקרים), זה מספיק כדי להראות שקבוצה היא סגורה. תהי $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq p(A)$ סדרה שמתכנסת ל־$y \in \mathbb{F}$. נבחר $x_n \in p^{-1}(\{y_n\}) \cap A$. אנחנו טוענים ש־$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ חסומה. זה נכון כי אם היא לא הייתה חסומה, אז $|y_n| = |p(x_n)|$ הייתה שואפת לאינסוף ולכן לא הייתה מתכנסת. לפי משפט בלוצאנו־וירשטראוס, קיימת תת סדרה $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ שמתכנסת ל־$x \in \mathbb{C}$. בגלל ש־A סגורה מתקיים ש־$x \in A$ ולכן $p(x) \in p(A)$. אבל p רציפה ולכן

$$y = \lim_{n\in\mathbb{N}} y_n = \lim_{k\in\mathbb{N}} y_{n_k} = \lim_{k\in\mathbb{N}} p(x_{n_k}) = p(x) \in A$$

כרצוי.

9. נסתכל על $X := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ועל יחס השקילות $\sim$ שמוגדר על ידי

$$(x,y) \sim (x',y') \iff \exists \alpha > 0 : (x,y) = \alpha(x',y')$$

הראו ש־$X/\sim \cong S$ כאשר $S \subseteq \mathbb{R}^2$ הוא הספרה.
<u>פתרון</u>

נתבונן בהעתקה $f:X\to S$ שמוגדרת ע"י

$$f(x):=\frac{1}{\|x\|}x$$

קל לראות שהיא רציפה ועל. בנוסף, $\sim=\sim_f$ ולכן לפי משפט קריטריון המנה, אם נראה ש־f מנה אז יתקיים ש־$X/\sim_f\cong Im(f)=S$. נשים לב ש־f היא רטרקציה על $S\subseteq X$ ולכן לפי התרגיל הראשון היא מנה.

1 שאלות סיכום

1. הוכיחו או הפריכו: אם (X,d) מרחב מטרי קומפקטי ו־$f:X\to X$ היא פונקציית ליפשיץ עם מקדם 1, אז יש ל־f נקודת שבת.
<u>פתרון</u>

הפרכה: נסתכל על הספרה $S\subseteq\mathbb{C}$ ועל ההעתקה $f:S\to S$ לפי

$$f(z):=iz$$

(כלומר סיבוב ב־90 מעלות). קל לראות שזו איזומטריה (ולכן פונקציית ליפשיץ עם מקדם 1). מנגד, אין לה נקודת שבת.

2. יהי (X,τ) מרחב קומפקטי

(א) הוכיחו או הפריכו: אם X קשיר מקומית אז הוא גם קשיר

(ב) הוכיחו או הפריכו: אם X קשיר מסילתית מקומית אז הוא גם קשיר מסילתית
<u>פתרון</u>
הפרכה בשני המקרים, מספיק להסתכל על $X=[0,1]\cup[2,3]$

3. יהי $(P,<)$ מרחב סדור לינארית. הוכיחו ש־P קומפקטי עם טופולוגיית הסדר אם ורק אם לכל תת קבוצה לא ריקה יש $\sup$ ו־$\inf$, כלומר חסם עליון קטן ביותר וחסם תחתון גדול ביותר.
<u>פתרון:</u>

ראשית נניח ש־P אכן קומפקטית, נראה שלכל קבוצה לא ריקה יש $\sup$ (ההוכחה ל־$\inf$ דומה). תהי $A\subseteq P$ תת קבוצה לא ריקה. לכל $a\in A$ נסמן

$$L_a:=\{x\in P\mid x<a\}$$

בנוסף, לכל חסם מלעיל $A\leq s\in P$ נגדיר

$$U_s:=\{x\in P\mid s<x\}$$

לבסוף נסמן $U(A)$ עבור קבוצת החסמים מלעיל של A (שיכולה להיות ריקה). נניח בשלילה של־A אין $\sup$. אז לכל חסם $s\in U(A)$ קיים $s'\in U(A)$ כך ש־$s'<s$. בנוסף, לכל איבר $a\in A$ קיים איבר $a'\in A$ כך ש־$a<a'$. קל לראות מכאן ש־

$$\alpha:=\{L_a\}_{a\in A}\cup\{U_s\}_{s\in U(A)}$$

הוא כיסוי פתוח של A בלי תת כיסוי סופי. הסתירה מוכיחה ש־$\sup$ קיים.

מנגד, נניח שקיים $\sup$ ו־$\inf$ לכל תת קבוצה לא ריקה, נראה ש־P קומפקטית. יהי $\{O_i\}_{i\in I}$ כיסוי של P. נגדיר $a := \inf P$. נגדיר

$$B := \{b \in P \mid [a,b] \text{ has a finite subcover with elements of } \{O_i\}_{i\in I}\}$$

כלומר, קבוצת האברים $b \in P$ כך ש־$[a,b]$ ניתן לכיסוי על ידי תת קבוצה סופית של $\{O_i\}_{i\in I}$. ברור ש־$a \in B$ ולכן B אינה ריקה. לפי הנתון, קיים $b := \sup B$. לפי הגדרה, קיימת $F \subseteq I$ סופית כך ש־

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{i\in F} O_i$$

נחלק לשלוש מקרים:

(א) קיים $c \in P$ כך ש־$[a,b] = [a,c)$, כלומר c הוא האיבר העוקב של c. במקרה כזה נמצא $i_0 \in I$ כך ש־$c \in O_{i_0}$. אז $\{O_i\}_{i\in F} \cup \{O_{i_o}\}$ כיסוי של $[a,c]$, בסתירה להגדרה של b.

(ב) לכל $b < y$ קיים $b < y' < y$. במקרה כזה נמצא $i_0 \in I$ כך ש־$b \in O_{i_0}$. לפי הגדרה, קיימים $x < b < y$ כך ש־$(x,y) \in O_{i_0}$. לכן קיים $b < y' < y$ ובפרט $\{O_i\}_{i\in F}$ כיסוי של $[a,y']$, בסתירה להגדרה של b.

(ג) אין איבר $b < c$. מכיוון שהסדר לינארי, זה אומר שלכל $x \in P$ מתקיים $x \leq b$. כלומר, $P = [a,b]$ ניתנת לכיסוי סופי על ידי $\{O_i\}_{i\in I}$.