הרצאה 3

תזכורת - שלילה של כמתים:

$$\neg(\forall x\, \varphi(x)) = \exists x(\neg \varphi(x))$$

$$\neg(\exists x\, \varphi(x)) = \forall x(\neg \varphi(x))$$

* כל הילדים הולכים לבית הספר $\xrightarrow{\neg}$ קיים ילד שאינו הולך לבי"ס!

$\forall x\, \varphi(x)$

* קיים ילד שהולך לבי"ס $\xrightarrow{\neg}$ כל הילדים אינם הולכים לבי"ס.

$\exists x \varphi(x)$

שלילה מורכבת:

$$\neg(\forall x \overbrace{\exists y\, \varphi(x,y)}^{\psi(x)}) = \quad \leftarrow \text{שלילת } \forall$$

$$= \exists x(\neg(\exists y\, \varphi(x,y))) = \quad \leftarrow \text{שלילת } \exists$$

$$= \exists x\, \forall y(\neg \varphi(x,y))$$

$$\neg(\forall x \exists y \forall z \exists w\, \varphi(w,x,y,z)) =$$

$$= \exists x \forall y \exists z \forall w(\neg \varphi(w,x,y,z))$$

$$(1)\quad \forall x(\exists y\, \varphi(x,y)) \xrightarrow{\neg} \exists x \forall y(\neg\varphi(x,y))$$

$$\neq \quad \not\Leftrightarrow$$

$$(2)\quad \exists y(\forall x\, \varphi(x,y)) \xrightarrow{\neg} \forall y \exists x(\neg \varphi(x,y))$$

(1) לכל סיר יש מכסה שמתאים לו

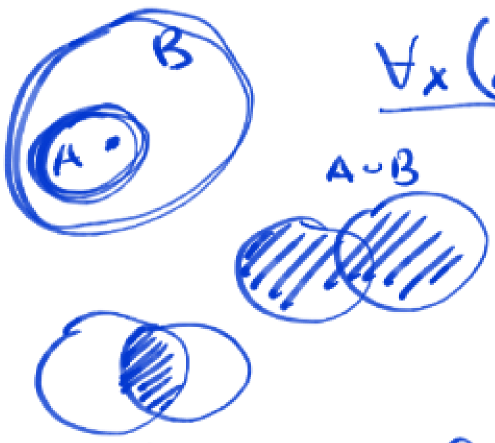
② קיים מכסה המתאים לכל הסירים ☺

תזכורת - מבוא לתורת הקבוצות

- ϕ - קב' ריקה.
- $\{\phi, \{\phi\}\}$ - קב' בת שני איברים: $\phi, \{\phi\}$
- $\cap$ חיתוך, $\cup$ איחוד, $A \setminus B$, A^c

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$$
$$A \cap B := \{x \mid x \in A \land x \in B\}$$
$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \land x \notin B\}$$
$$A^c := \{x \mid x \in U \land x \notin A\} \qquad \underline{(A \subseteq U)}$$

- $A \subseteq B$: $\underline{\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)}$



$A \cap B$

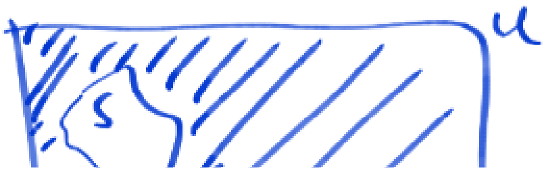
הערה: כאשר מדברים על "משלים" חשוב להבין בתוך איזו קבוצה מדובר.

$$S = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$$

$$S^c = \{\text{אי-זוגיים}\}, \qquad S^c = \{17, \pi, \ldots\}$$

בתוך $\mathbb{N}$ בתוך $\mathbb{R}$

$$S^c = U \setminus S \quad \Longleftarrow \quad S \subseteq U$$



· $A=B$: הגדרה דו כוונית : $B\subseteq A \wedge A\subseteq B$.

· $\emptyset\subseteq A$ לכל קבוצה A.

צריך להראות שלכל x אם $x\in\emptyset$ אז $x\in A$.

נזכר:

$P\to Q$	P	Q
T	T	T
F	T	F
T	F	T
T	F	F

״סתירה גוררת הכל״

$$\left\{\forall x\,(\underbrace{x\in\emptyset}_{P} \longrightarrow \underbrace{x\in A}_{Q})\right. \quad : \quad T$$

תמיד F

$$\forall x\,(x\in\emptyset \longrightarrow x\notin A) \quad : \quad T$$

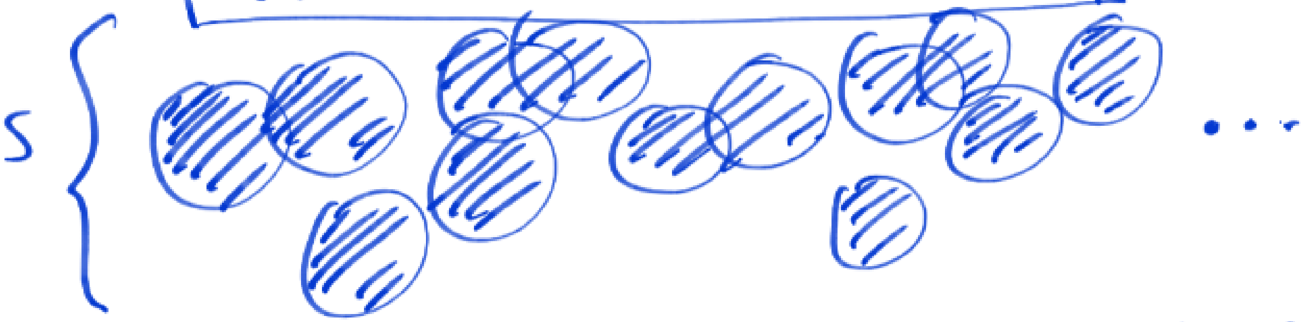
מסקנה: $\emptyset\subseteq A$, $\emptyset\subseteq A^c$.

איחוד וחיתוך כלליים

כאשר S הוא אוסף קבוצות $S=\{\ldots,A\ \ldots\}$

נגדיר:

$$\boxed{\bigcup_{A\in S} A := \{x \mid \underbrace{\exists A\in S}\ :\ x\in A\}}$$



דוגמה:

$$S=\{\emptyset,\{1,2\},\{\emptyset,\{1\}\}\}$$

$$\bigcup_{A\in S}=\{x \mid \exists A\in S: x\in A\}=$$

$$=\{1,2,\emptyset,\{1\}\}$$

זו הכללה של המקרה הקודם -

$$S=\{X,Y\}$$

$$\bigcup_{A\in S}A = X\cup Y$$

* יתכן ש-S אינסופית.

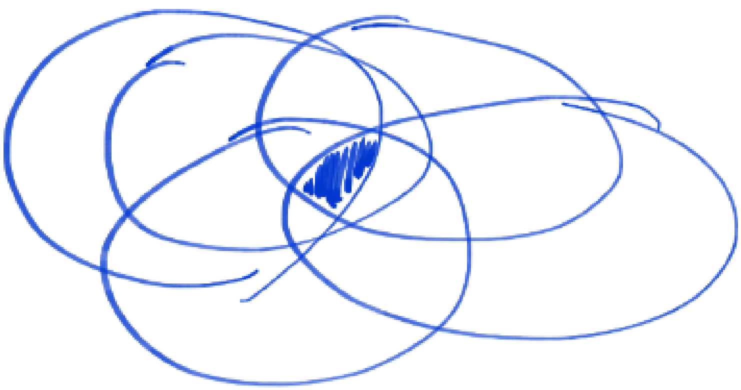
דוגמה נוספת:

$$S=\{\emptyset\}$$

$$\bigcup_{A\in S}=\{x \mid \underbrace{\exists A\in S}_{\emptyset}: \underset{x\in\emptyset}{x\in A}\}=\emptyset$$

חיתוך:

$$\boxed{\bigcap_{A\in S}A := \{x \mid \forall A\in S: x\in A\}}$$



דוגמה:

$S=\{\{$תושבי רעננה$\},\{$תלמידי תיכון$\},\{$סטודנטים למתמטיקה$\}\}$

$\bigcap_{A\in S}A=\{$תלמידי התיכון הגרים ברעננה והם סטודנטים למתמטיקה$\}$

• שוב, S יכולה להיות אינסופית.

<u>טענה:</u> תהי S אוסף של קבוצות. נניח שקיימות $A,B\in S$ כך ש- $A\cap B=\emptyset$.
אזי:

$$\bigcap_{A\in S} A = \emptyset .$$

<u>הוכחה:</u> נניח בשלילה כי קיים $x\in\bigcap_{A\in S} A$, אזי לכל $A\in S$ מתקיים ש- $x\in A$. בפרט, זה נכון עבור A,B ולכן $x\in A$ וגם $x\in B$. לכן: $x\in A\cap B=\emptyset$, בסתירה. לכן, לא קיים אף $x\in\bigcap_{A\in S} A$, כלומר

$$\bigcap_{A\in S} A = \emptyset .$$

מ.ש.ל.

$\rightsquigarrow \bigcap = \emptyset$

<u>דוגמאות:</u>

(1) $S=\left\{ \underbrace{\left\{\frac{a}{b} : a\in\mathbb{Z}\right\}} : b\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}$ $(b\neq 0)$

איברי S:

$b=1: \quad \left\{\frac{a}{1} : a\in\mathbb{Z}\right\}=\mathbb{Z}$

$b=2: \quad \left\{\frac{a}{2} : a\in\mathbb{Z}\right\}=\left\{0,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{2}{2},\pm\frac{3}{2},\pm\frac{4}{2},\dots\right\}$

$b=17: \quad \left\{\frac{a}{17} : a\in\mathbb{Z}\right\}=\left\{0,\pm\frac{1}{17},\pm\frac{2}{17},\dots\right\}$

$$\bigcup_{A\in S} A = \mathbb{Q}$$

הוכחה:

$(\subseteq)$: יהי $x\in \bigcup_{A\in S} A$. כלומר, קיים $A\in S$:

$x\in A$. כלומר, קיים $b\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ כך ש-

$$x\in \underbrace{A=\left\{\frac{a}{b} : a\in\mathbb{Z}\right\}}$$

כך נראות קבוצות השייכות ל-S

כלומר, $x=\frac{a}{b}$ לאיזה $a,b\in\mathbb{Z}$ $(b\neq 0)$.

כנדרש, $x\in\mathbb{Q}$.

$(\supseteq)$: יהי $x\in\mathbb{Q}$. אזי ניתן לכתוב $x=\frac{m}{n}$ לאיזשהם $m,n\in\mathbb{Z}$, $n\neq 0$. כלומר:

$$x\in\left\{\frac{a}{n} : a\in\mathbb{Z}\right\} =: A$$

זו קבוצה השייכת ל-S

קיבלנו, לפי הקבוצה התחתונה: קיים $A\in S$ כך ש- $x\in A$.

$x\in\bigcup_{A\in S} A$. מ.ש.ל.

(2) $(\mathbb{Z})$

$$S=\left\{\{0,\pm p,\pm 2p,\pm 3p,\dots\} : p \text{ ראשוני}\right\}$$

$$=\left\{\{x\in\mathbb{Z} \mid p \mid x\} : p \text{ ראשוני}\right\}$$

p מחלק את x

איברי S:

$p=2$: $\{0,\pm 2,\pm 4,\pm 6,\dots\}$

$p=3$: $\{0,\pm 3,\pm 6,\pm 9,\dots\}$

$p=5: \{0, \pm5, \pm10, \pm15, \ldots\}$

$\vdots$

(תזכורת: $p \mid x \iff \exists m \in \mathbb{Z} : p \cdot m = x$)

מי הם המשלימים של האיחוד בתוך $\mathbb{Z}$? $\left(\bigcup_{A\in S} A\right)^c = \{\pm1\}$

הוכחה:

(⊇): יהי $x \in \{\pm1\}$, צריך להראות ש- $x \notin \bigcup_{A\in S} A$.

$$\left[\begin{array}{l} x \in \bigcup_{A\in S} A \iff \exists A \in S : x \in A \\ x \notin \bigcup_{A\in S} A \iff \underbrace{\forall A \in S : x \notin A} \end{array}\right.$$

יהא $A \in S$. אזי: $A = \{x \mid p \mid x\}$

אבל ±1 לא מתחלקים באף ראשוני, ולכן $\pm1 \notin A$.
(כאשר p ראשוני.)

הוכחנו: $\forall A \in S, \ \pm1 \notin A$

לכן: $\pm1 \notin \bigcup_{A\in S} A$.

לכן: $\{\pm1\} \subseteq \left(\bigcup_{A\in S} A\right)^c$.

(⊆): יהי $x \in \left(\bigcup A\right)^c$. צ"ל $x \in \{\pm1\}$

$A\in S$

אני: בשלילה כי $x\neq\pm1$. לפי המשפט היסודי של האריתמטיקה: שהוכחנו בתרגול באינדוקציה, כל מספר שלם $\neq\pm1$ מתחלק בראשוני.

בפרט, קיים p ראשוני: $p \mid x$, ולכן:

$$x\in \underbrace{\{z\in\mathbb{Z} \mid p \mid z\}}_{\in S} =: A$$

כלומר, מצאנו $A\in S$ כך ש- $x\in A$, ולכן:

$x \in \bigcup_{A\in S} A$, בסתירה לנתון לפיה: $x\in\left(\bigcup_{A\in S} A\right)^c$.

לכן, $x=\pm1$, כנדרש. מ.ש.ל.

(3) נניח $x\in\mathbb{R}$. נתבונן באוסף הקבוצות:

$$S = \left\{ \left(x-\frac{1}{n},\, x+\frac{1}{n}\right) : n\in\mathbb{N} \right\}$$

קטע פתוח. $= \left\{y\in\mathbb{R} \mid x-\frac{1}{n} \lneq y \lneq x+\frac{1}{n}\right\}$

תזכורת: $(a,b) := \{y\in\mathbb{R} \mid a<y<b\}$

$$\bigcap_{A\in S} A = \{x\}$$

ה - ט

<u>הוכחה:</u>

(⊇): צריך להראות ש- $x\in\bigcap_{A\in S} A$.

צריך להראות ש<u>לכל</u> $A\in S$ מתקיים $x\in A$.

$$A = \left(x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}\right)$$

יהי $A\in S$. אזי A מהצורה $\left(x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}\right)$ לאיזשהו $n\in\mathbb{N}$. ברור כי:

$$x-\frac{1}{n} < x < x+\frac{1}{n},$$

ולכן:

$$x\in\left(x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}\right)=A.$$

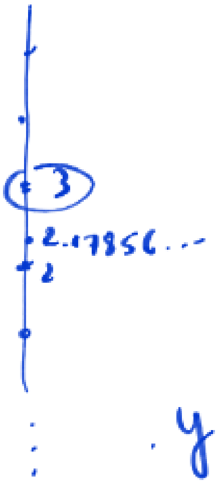
הראינו ש<u>לכל</u> $A\in S$ מתקיים $x\in A$, כלומר:

$$x\in\bigcap_{A\in S} A.$$

(⊆): יהי $y\in\bigcap_{A\in S} A$, צ"ל $y=x$.

<u>נניח בשלילה</u> כי $y\neq x$. אזי:

או:
(1) $y<x$
(2) $y>x$



(1) קל לנו למצוא $n\in\mathbb{N}$: $y\le x-\frac{1}{n}$.

הרי $y<x \Leftarrow x-y>0$.

ניקח:

$$n:=\left\lceil \frac{1}{x-y}\right\rceil.$$

ונראה כי n זה מתקיים:

$$x-y=\frac{1}{\frac{1}{x-y}} \ge \frac{1}{\left\lceil \frac{1}{x-y}\right\rceil}=\frac{1}{n}$$

$|\overline{x-y}|$

כלומר אז: $y \le x - \frac{1}{n}$.

כלומר, $y \notin \left(x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}\right) =: A$

(אחרת: $\underbrace{x-\frac{1}{n} < y} < x+\frac{1}{n}$.)

כלומר מצאנו $A \in S$ כך ש- $y \notin A$,
ולכן: $y \notin \bigcap_{A\in S} A$

נזכיר:

$$\begin{cases} y \in \bigcap_{A\in S} A \iff \forall A\in S : y\in A \\ y \notin \bigcap_{A\in S} A \iff \exists A\in S : y\notin A \end{cases}$$

בסתירה לכך ש- $y \in \bigcap_{A\in S} A$, לכן $y = x$ כנדרש.
מ.ש.ל.

(2) – בדומה.

דה-מורגן כללי:
(נניח שכל $A \subseteq U$)

$$\boxed{\begin{aligned} &(1) \quad \left(\bigcup_{A\in S} A\right)^c = \bigcap_{A\in S} A^c \\ &(2) \quad \left(\bigcap_{A\in S} A\right)^c = \bigcup_{A\in S} A^c \end{aligned}}$$

הוכחה:
(1): ($\supseteq$): יהי $x \in \bigcap_{A\in S} A^c$. כלומר, לכל $\underline{A\in S}$, מתקיים: $\underline{x \in A^c}$. ($x \notin A$)
נניח בשלילה כי:

$$x \notin \left(\bigcup_{A\in S} A\right)^c$$

כלומר:

$$x \in \bigcup_{A\in S} A$$ [לפי הגדרת משלים]

לכן קיים $A\in S$ כך ש- $x\in A$. בסתירה.

לכן: $x \in \left(\bigcup_{A\in S} A\right)^c$, כנדרש.

($\supseteq$): יהי $x \in \left(\bigcup_{A\in S} A\right)^c$, צ"ל: $x \in \bigcap_{A\in S} A^c$.

יהי $A\in S$, נראה כי $x\in A^c$. נניח בשלילה.

שלילתה: $A\in S : x\in A$.

$\forall A\in S : x\in A^c$

שלילה:

$\exists A\in S : x\in A$

אבל אם קיים $A\in S$ כך ש- $x\in A$, אזי:

$$x \in \bigcup_{A\in S} A.$$

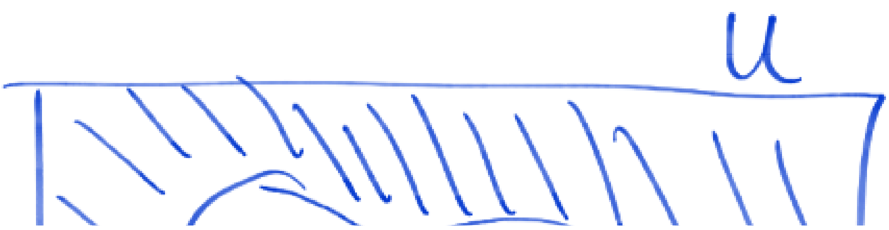
יצא סתירה לכך: $x \in \left(\bigcup_{A\in S} A\right)^c$,

ולכן:

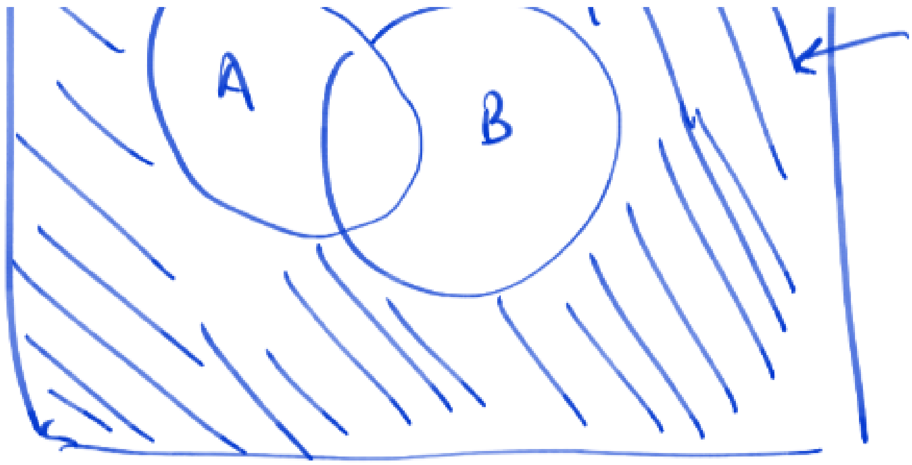
$$x \in \bigcap_{A\in S} A^c.$$

מ.ש.ל.

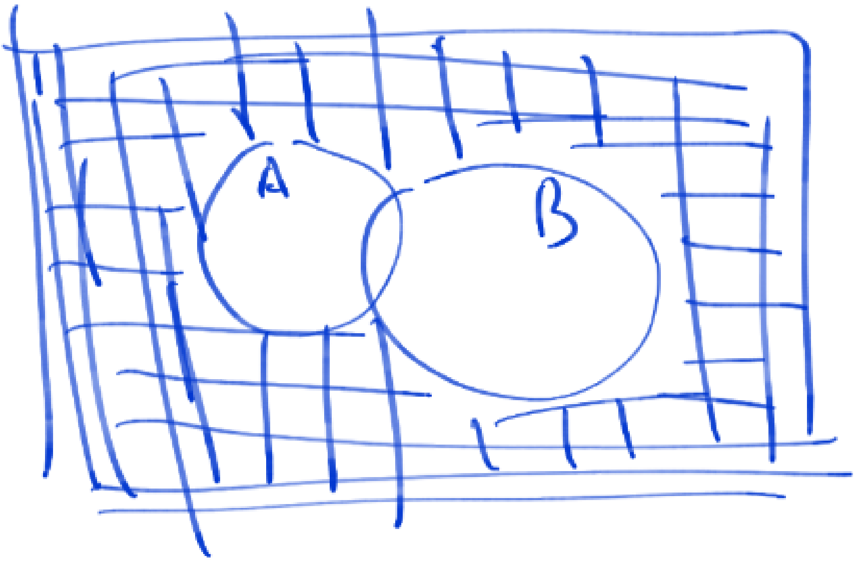
(2) גרושה.



$11^{\underline{00}}$



$(A \cup B)^c$



$A^c \cap B^c$

דוגמה מילולית:

$S = \Big\{ \{\text{תושבי רעננה}\}, \{\text{תלמידי תיכון}\}, \{\text{סטודנטים למתמטיקה}\} \Big\}$

$\bigcap_{A \in S} A = \{\text{תלמידי תיכון ברעננה שלומדים מתמטיקה באוני'}\}$

$\left(\bigcap_{A \in S} A\right)^c = \{\text{מי ש- אינו תושב רעננה, או אינו תלמיד תיכון, או אינו סטודנט למתמטיקה}\} =$

$= \{\text{תושבי}\}^c \cup \{\text{תלמידי}\}^c \cup \{\text{סטודנ}\}^c =$

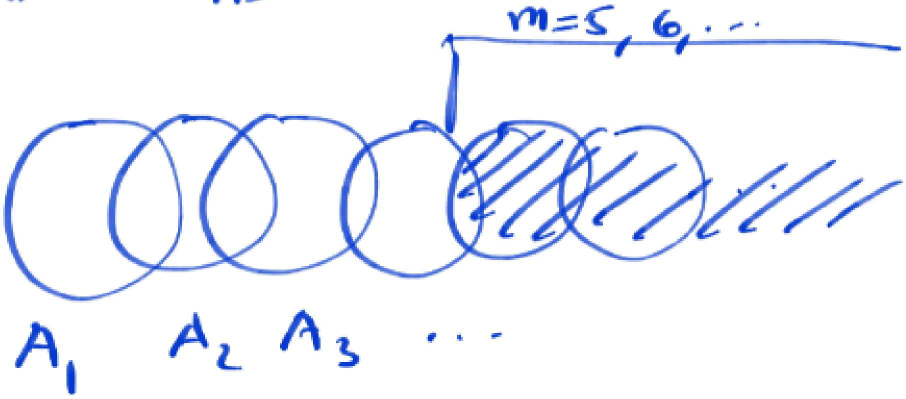
[illegible] [תקין] [illegible]

$$= \bigcup_{A\in S} A^c$$

<u>איחודים וחיתוכים מורכבים:</u>

<u>דוגמה:</u> יהיו $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ קב' של קבוצ':

לכל $n\in\mathbb{N}$ ניתן להגדיר: $\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m \ , \ \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$



<u>טענה:</u>

$$\boxed{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m\right) \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right)}$$

הוכחה:

x: $\exists n\in\mathbb{N}: x\in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$

$$\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m = \bigcap_{A\in\{A_n, A_{n+1},\dots\}} A$$

$$\left(\bigcap_{m=17}^{\infty} A_m = A_{17}\cap A_{18}\cap A_{19}\cap\dots\right)$$

$$x:\ \exists n\in\mathbb{N}\ \forall m\ge n:\ x\in A_m \quad (*)$$

גבול תחתון

$$\to x:\ \forall n\in\mathbb{N}:\ x\in \underbrace{\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m}$$

$$\downarrow$$

$$x:\ \forall n\in\mathbb{N}\ \exists m\ge n:\ x\in A_m \quad (**)$$

גבול עליון

$x\in A_4 \quad x\in A_5 \quad x\in A_6 \quad \cdots$

עליון $\quad A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad | A_4 \quad A_5 \quad A_6 \quad \cdots$

$x\in A_6$

לא $\quad A_1 \quad A_2' \quad A_3 \quad \boxed{A_4} \quad A_5 \quad \boxed{A_6} \quad \cdots$

$(\subseteq)$: יהי $x\in$ גבול תחתון.

לפי $(*)$:

$$\to \exists N:\ \forall M\ge N:\ x\in A_M$$

צריך להוכיח $(**)$:

$$\forall n:\ \underset{\sim}{\exists} m\ge n:\ x\in A_m$$

אין מוכיחים פירוק כמה?

יהי $n\in\mathbb{N}$, צריך למצוא $m\ge n$ כך ש $x\in A_m$.

N

$m \qquad\qquad m$

ניקח $m = \max\{n, N\}$

או: $m = n + N$ (כי מה שגדול $\geq n, N$)

נראה כי $x \in A_m$, כלומר ה-m הזה יעבוד.
כלומר, נראה כי מקיים את הפרדיקט השני.

כי: (*): לכל $M \geq N$, מתקיים $x \in A_M$.
בפרט, עבור $N \leq M = m = \max\{n, N\}$ ולכן:
$x \in A_M = A_m$. מ.ש.ל.

הערה: ההכלה ($\supseteq$) לא אמור מתקיימת.
למשל:

$$A_{2n} := \emptyset$$

$$A_{2n-1} := \{1\}$$

$$\{1\},\ \emptyset,\ \{1\},\ \emptyset,\ \{1\},\ \emptyset,\ \ldots$$

לכל $n \in \mathbb{N}$, ניקח $\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m = \emptyset$,
ולכן:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m \right) = \emptyset. \quad (*)$$

וגם: $\{1\}$

לכל אינדקס שמתחיל מ-$n \in \mathbb{N}$ ניתן למצוא $m \geq n$
(בפרט, אם אי-זוגי) גדול כך ש $A_m = \{1\}$ ולכן

$1 \in A_m$.

לכל $n \in \mathbb{N}$:

$$\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m = \{1\}$$

ולכן:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m \right) = \{1\}.$$

הערה: הקודם מגלה את צד שמאל:
כל האיברים המופיעים בכל A_m מה משהו, $m \geq n$.

צד ימין:
כל האיברים כך שלכל n יש $m \geq n$ עבורו $x \in A_m$
$\Updownarrow$
יש ∞ m-ים עבורם $x \in A_m$.

קבוצת החזקה

הגדרה:
תהא A קבוצה. נגדיר את קבוצת החזקה של A:

$$P(A) := \{ X \mid X \subseteq A \}$$

כלומר, אוסף תתי-הקב' של A.

דוגמה:
① $A = \{1,2,3\}$

$$P(A) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\} \}$$

הערה: לכל קב' A מתקיים: $\emptyset, A \in P(A)$.

② $\underline{A=\{\emptyset\}}$

$$P(A)=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$$

③ $\underline{A=\emptyset}$

$$P(A)=\{\emptyset\}$$

④ $\underline{A=\mathbb{N}}:$

$$\left\{\begin{array}{l}\emptyset,\{1,2,5,83\},\\ \{17,99,3005\},\ldots\\ \ldots\{\text{האי-זוגיים}\},\\ \{\text{מספרים שמתחלקים ב-7 וגדולים מ-88}\},\ldots\end{array}\right\}=P(A)$$

<u>כל תת-קבוצה של המספרים הטבעיים.</u>

<u>תכונות:</u>

(1) מתקיים: $\boxed{A\subseteq B \iff P(A)\subseteq P(B)}$.

<u>הוכחה:</u> ($\Rightarrow$) נניח $A\subseteq B$. צ"ל: $P(A)\subseteq P(B)$.

יהי $X\in P(A)$, אזי $X\subseteq A$. מתקיים $X\subseteq B$,
ולכן: $X\in P(B)$. הוכחנו הכלה $P(A)\subseteq P(B)$.

($\Leftarrow$) נניח $P(A)\subseteq P(B)$ ועלינו להוכיח: $A\subseteq B$.

הראינו כי תמיד $A\in P(A)$. לכן: $A\in P(B)$,
ולכן: $A\subseteq B$ כנדרש.

מ.ש.ל.

(2) $\boxed{A=B \iff P(A)=P(B)}$

<u>הוכחה:</u>

($\Leftarrow$) $P(A)=P(B)$ בפרט $P(A)\subseteq P(B)$ ולפי (1) $A\subseteq B$

$P(B)=P(A)$ גורר $P(B)\subseteq P(A)$ ולפי (1), $B\subseteq A$,

הכלה דו״כ ולכן $A=B$.

$(\Rightarrow)$ $A=B$ גורר $A\subseteq B$ ולפי (1), $P(A)\subseteq P(B)$

$B\subseteq A$ —״— $P(B)\subseteq P(A)$

...הכלה דו״כ: $P(A)=P(B)$.

מ.ש.ל

3) $P(A\cup B)\overset{?}{=}P(A)\cup P(B)$

$A=\{1\},\ B=\{2\},\ A\cup B=\{1,2\}$

$P(A\cup B)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$ $\neq$

$P(A)\cup P(B)=\underbrace{\{\emptyset,\{1\}\}}_{P(A)}\cup\underbrace{\{\emptyset,\{2\}\}}_{P(B)}=\{\emptyset,\{1\},\{2\}\}$

לכן אין שוויון כללי.
מתקיים: רק $(\supseteq)$!

4) $\boxed{P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)}$

$\left(\begin{array}{l}X\cap Y\subseteq X\\ X\cap Y\subseteq Y\end{array}\right)$

הוכחה:

$(\supseteq)$: יהי $X\in P(A)\cap P(B)$.

$X\subseteq A$ וגם $X\subseteq B$

אזי: $X\subseteq A\cap B$ ולכן: $X\in P(A\cap B)$.

$(\subseteq)$: יהי $X\in P(A\cap B)$. אזי: $X\subseteq A\cap B$,

בפרט $X\subseteq A$ ולכן $X\in P(A)$,

וגם $X\subseteq B$ ולכן $X\in P(B)$.

לכן: $X \in P(A) \cap P(B)$. מ.ש.ל.

<u>טענה:</u> אם A קבוצה סופית אזי:

$$|P(A)| = 2^{|A|}$$

($|A| =$ גודל $=$ כמה קיים: איברים?)

<u>הוכחה:</u> באינדוקציה על $n = |A|$.

<u>$n=0$:</u> ראשית כי: $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

ולכן: $|P(\emptyset)| = |\{\emptyset\}| = 1 = 2^0$.

<u>$n+1$:</u> תהי A קבו' בת $n+1$ איברים.

$$|A\setminus\{a\}| = (n+1) - 1 = n$$

מהנחת האינדוקציה:

$$P(A\setminus\{a\}) = 2^n.$$

כיצד נספור אברי $P(A)$?

מספר תתי-קבו' של A.

יהי a כלשהו של A (קיים):

$(a \notin X)$ $(a \in X)$

$(X \subseteq A\setminus\{a\})$

$\Downarrow$

$X \in P(A\setminus\{a\})$

יש כאלו 2^n איברים
(מהנחת האינדוקציה)

$(X = (X\setminus\{a\}) \cup \{a\})$

$\Downarrow$

$X\setminus\{a\} \subseteq A\setminus\{a\}$

$\Downarrow$

$X\setminus\{a\} \in P(A\setminus\{a\})$

יש כאלו בדיוק 2^n איברים.

לא ספרנו אף תת-קבוצה פעמיים!

לכן:

$$|P(A)| = \underbrace{2^n + 2^n}_{2\cdot 2^n} = 2^{n+1} = 2^{|A|}$$

כנדרש.

מ.ש.ל.

הסבר נוסף לצד ימין:

כל תת-קבוצה X של A שמכילה את a היא:

$$X = \{a\} \cup \underbrace{(X\setminus\{a\})}$$

לכן יש 2^n אפשרויות מהנחת האינדוקציה.

<u>דוגמה:</u> נניח A קבוצה. אזי:

$$\bigcup_{X\in P(A)} X = A.$$

<u>הוכחה:</u>

$(\supseteq)$ יהי $a\in A$, צ"ל: $a\in \bigcup_{X\in P(A)} X$.

כלומר, צריך להראות שקיים $B\in P(A)$ כך ש- $a\in B$.
יש כזה B! למשל, $B=A$, הרי $a\in A$
וגם $A\in P(A)$.

$(\subseteq)$ יהי $x\in \bigcup_{X\in P(A)} X$. כלומר, קיים $X\in P(A)$
עבורו $x\in X$. אבל $X\in P(A)$ לכן $X\subseteq A$,
ולכן: $x\in A$.

מ.ש.ל.

תזכורת:

$$\bigcup_{X\in P(A)} X = \{x \mid \exists X\in P(A) : x\in X\}$$

$$P(A) = \{X \mid X\subseteq A\}$$

$$X\in P(A) \iff X\subseteq A$$

<u>דוגמה:</u>

$$P_0(\mathbb{N}) := \{X \mid X\subseteq \mathbb{N} \text{ וגם } X \text{ סופי}\}$$

$$\bigcup^{\infty} P(\{1,\dots,n\}) = P_0(\mathbb{N}) \subseteq P(\mathbb{N})$$

$n=1$

$$\{X \mid X \overset{\text{ס}}{\subseteq} \mathbb{N}\}$$

<u>הוכחה:</u>

$(\subseteq)$: יהי $X \in \bigcup_{n=1}^{\infty} P(\{1,\dots,n\})$. לכן קיים $n \in \mathbb{N}$:

$$X \in P(\{1,\dots,n\})$$

כלומר: $X \subseteq \{1,\dots,n\}$

וגם, $X \subseteq \mathbb{N}$ וגם X סופית. לכן,

$$. X \in P_0(\mathbb{N})$$

$(\supseteq)$: יהי $X \in P_0(\mathbb{N})$. אזי: [מגדירים $P_0(\mathbb{N})$]

$$X \subseteq \mathbb{N}$$

$$X = \{x_1, \dots, x_k\} \quad \text{סופית}$$

נגדיר: $n := \max\{x_1, \dots, x_k\}$. מתקיים:

$$. X \subseteq \{1, \dots, n\}$$

לכן $X \in P(\{1,\dots,n\})$ ולכן:

$X \in \bigcup_{n=1}^{\infty} P(\{1,\dots,n\})$, כנדרש. מ.ש.ל.

<u>הערה:</u>

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} P(\{1,\dots,n\}) = \{X \mid \exists n: X \in P(\{1,\dots,n\})\} =$$

$$= \{X \mid \exists n: X \subseteq \{1,\dots,n\}\}$$