לינארית 1 (88112), סמסטר קיץ תשעד,מבחן לדוגמה -פתרון

חלק א

1. הוכחתם בהרצאה.
2. יהא V מ"ו נוצר סופית ו $T,S:V\to V$ ה"ל.
   (א) הוכיחו/הפריכו: אם $\text{Im}\left(T+S\right)\subseteq\text{Im}T$ אז $\text{Im}S\subseteq\text{Im}T$.
   פתרון: הוכחה: נניח $\text{Im}\left(T+S\right)\subseteq\text{Im}T$. צ"ל $\text{Im}S\subseteq\text{Im}T$ יהא $w\in\text{Im}S$ אזי קיים v כך ש
   $$w=Sv$$
   מההנחה, כיוון ש $\left(T+S\right)\left(v\right)\in\text{Im}\left(T+S\right)$, קיים $\hat{v}$ כך ש
   $$\left(T+S\right)\left(v\right)=T\hat{v}$$
   ולכן
   $$Sv=T\hat{v}-Tv$$
   ומכאן ש
   $$w=Sv=T\hat{v}-Tv=T\left(\hat{v}-v\right)\in\text{Im}T$$
   כמבוקש.
   (ב) הוכיחו/הפריכו: אם $\ker\left(T+S\right)\subseteq\ker T$ אז $\ker S\subseteq\ker T$.
   פתרון: הפרכה: ניקח $S=0$ ו $T\neq0$ אזי $\ker T\neq V,\ker S=V$ ולכן
   $$\ker\left(T+S\right)=\ker\left(T\right)$$
   ובפרט
   $$\ker\left(T+S\right)\subseteq\ker\left(T\right)$$
   אבל
   $$\ker S=V\nsubseteq\ker T$$
3. תהיינה $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$.
   (א) נניח $AB=0$. הוכיחו: $C(B)\subseteq N(A)$.
   פתרון: לכל j, מתקיים, לפי ההנחה
   $$0=C_j(AB)=AC_j(B)$$
   ולכן כל עמודה $C_j(B)$ היא איבר ב $N(A)$ ולכן
   $$\{C_1(B),\ldots,C_n(B)\}\subseteq N(A)$$
   ולכן
   $$C(B)=\text{span}\left\{C_1(B),\ldots,C_n(B)\right\}\subseteq N(A)$$

(ב) נניח $A^2=0$. הוכיחו: $\text{rank}A\leq\frac{n}{2}$.
פתרון: לפי סעיף א (עם $A=B$) נקבל כי

$$C(A)\subseteq N(A)$$

ולכן

$$\dim C(A)\leq\dim N(A)$$

ונוכל לחבר $\dim C(A)$ לשני האגפים לקבל

$$\dim C(A)+\dim C(A)\leq\dim N(A)+\dim C(A)=n$$

כאשר השיוויון באדום זה משפט הדרגה. כעת, כיוון ש $\text{rank}A=\dim C(A)$ קיבלנו ש

$$2\text{rank}A\leq n$$

או

$$\text{rank}A\leq\frac{n}{2}$$

כנדרש.

חלק ב

4. נתנים וקטורים

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\ w_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\ w_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$v_3=\begin{pmatrix}2\\a\\1\end{pmatrix},\ w_3=\begin{pmatrix}1\\2\\a\end{pmatrix}$$

(א) מצאו לאילו ערכי a, קיימת $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ המקיימת

$$Tv_1=w_1,\ \ Tv_2=w_2,\ \ Tv_3=w_3$$

פתרון: אם v_1,v_2,v_3 בסיס אז קיימת T יחידה לפי משפט ההגדרה. במקרים אחרים נבדוק.
בשביל ש v_1,v_2,v_3 יהיו בסיס מספיק להראות שהם בת"ל (לפי השלישי חינם). זה שקול לכך שהמטריצה

$$\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&a\\1&2&1\end{pmatrix}$$

הפיכה. ניתן לחשב ולגלות שהדטר' שלה היא $a-5$. לכן עבור $a\neq5$ קיימת T יחידה.
עבור $a=5$ נקבל ש v_1,v_2,v_3ת"ל. נבדוק מה התלות ע"י שנשים אותם במטריצה ונדרג:

$$\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&5\\1&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

ולכן $v_3 = 3v_1 - v_2$. כעת נגדיר T לפי משפט ההגדרה להיות היחידה המקיימת

$$Tv_1 = w_1,\ Tv_2 = w_2,\ T\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(הוקטור $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ הוא השלמה של v_1, v_2 לבסיס של $\mathbb{R}^3$). ולכן

$$Tv_3 = T\left(3v_1 - v_2\right) = 3Tv_1 - Tv_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = w_3$$

ולכן גם מתקיים $Tv_3 = w_3$.

(ב) עבור $a = 1$ מצאו את T מהסעיף הקודם מפורשות.

פתרון: כולם מוזמנים לכתוב פתרון מסודר ולעלות לאתר. זה יישום מידי של משפט ההגדרה.אפשר לפתור את המערכות

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

ולגלות למה שווה $T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ואז

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = xT\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + yT\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + zT\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

.

(ג) מצאו את העתקה ההופכית להעתקה מסעיף קודם.

פתרון: כולם מוזמנים לכתוב פתרון מסודר ולעלות לאתר. זה יישום מידי של משפט ההגדרה כמו בסעיף קודם, כאשר אנחנו יודעים ש T^{-1} ניתנת להגדרה ע"י משפט ההגדרה, להיות ה"ל היחידה המקיימת

$$T^{-1}w_1 = v_1, \quad T^{-1}w_2 = v_2, \quad T^{-1}w_3 = v_3$$

5. נסמן $V = \mathbb{R}_3[x]$ ונגדיר

$$W = \{p(x) \in V \mid p(1) = p(2)\}$$
$$U = \text{span}\left\{1 + x + x^3, x^2 - 1, 1 + x + x^2\right\}$$

מצאו בסיסים ומימדים למרחבים $U \cap W, U + W$.

פתרון: כולם מוזמנים לכתוב פתרון מסודר ולעלות לאתר. נסתפק פה בלהגיד שניתן לעבוד עם הבסיס הסטנדרטי S של V ולהציג את המרחבים

$$[U]_S = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$[W]_S = \left\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mid a + b + c + d = a + 2b + 4c + 8d\right\} = \left\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mid 0 = b + 3c + 7d\right\}$$

ולהמשיך את הפתרון עם אלגוריתמיקה ידועה ומוכרת.

6. (א) תהא
$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$$
מצאו מטריצה $B\neq 0$ כך ש $AB=0=BA$.

פתרון: כולם מוזמנים לכתוב פתרון מסודר ולעלות לאתר. מתקיים כי $|A|=0$ ולכן A אינה הפיכה. נגדיר
$$B=\mathrm{adj}A$$
ונשים לב ש
$$B_{1,1}=45-48=-3$$
ולכן $B\neq 0$. בנוסף, לפי משפט
$$AB=BA=A\mathrm{adj}A=|A|\,I=0I=0$$
כנדרש.

(ב) תהא $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ המוגדרת
$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\w\\0\\z\end{pmatrix}$$
חשבו את המטריצה המייצגת של T^n (לכל nטבעי) לפי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^4$.

פתרון: נסמן ב S את הבסיס הסטנדרטי ונשתמש במשפט ש
$$[T^n]_S^S=\left([T]_S^S\right)^n$$
נתחיל בחישוב
$$[T]_S^S=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$
ולכן, בשימוש המשפט
$$[T^2]_S^S=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$
$$[T^3]_S^S=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$
$$[T^4]_S^S=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$
כעת: טענה: לכל $n\geq 3$ מתקיים כי
$$[T^n]_S^S=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$
הוכחה - באינדוקציה:

- בסיס:עבור $n=3$ ראינו.
- צעד: נניח נכונות עבור n כלשהוא ונוכיח עבור $n+1$:

$$[T^{n+1}]_S^S = [T^n]_S^S [T]_S^S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כמו שרצינו (המעבר באדום זה הנחת האינדוקציה).