מבחן בקורס מתמטיקה בדידה (83-116)

מועד א'-פיתרון

אוניברסיטת בר אילן

מרצה: ד"ר שמחה הבר.
מתרגלת: עדי ניב.
משך המבחן:
אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.
יש לענות על 4 שאלות מתוך 6
ערך כל שאלה 25 נק'.

<u>שאלה 1:</u>

א. (15 נק') הוכיחו או הפריכו: לכל שלוש קבוצות A,B,C כך ש-

$$(A\cup B)\cap C=\phi$$

מתקיים: אם $A\cup C=B\cup C$ אז $A=B$.

<u>הוכחה:</u>

$$\left.\begin{array}{l} x\in A\Rightarrow x\in A\cup C\Rightarrow x\in B\cup C\Rightarrow x\in B\vee x\in C \\ if\quad x\in B\quad we're\quad done \\ if\quad x\in C\quad then,\quad (A\cup B)\cap C=\phi\quad\Rightarrow x\notin A\cup B\quad\Rightarrow x\notin A\quad contradiction \end{array}\right\}\Rightarrow x\in B\Rightarrow A\subseteq B$$

וכנ"ל בכיוון ההפוך:

$$\left.\begin{array}{l} x\in B\Rightarrow x\in B\cup C\Rightarrow x\in A\cup C\Rightarrow x\in A\vee x\in C \\ if\quad x\in A\quad we're\quad done \\ if\quad x\in C\quad then,\quad (A\cup B)\cap C=\phi\quad\Rightarrow x\notin A\cup B\quad\Rightarrow x\notin B\quad contradiction \end{array}\right\}\Rightarrow x\in A\Rightarrow B\subseteq A$$

ב. (10 נק') הוכיחו או הפריכו: $P(N)\setminus P(\{7\})\subseteq P(N\setminus\{7\})$
(כאשר N היא קבוצת המספרים הטבעיים).

<u>הפרכה:</u>

$$P(\{7\})=\{\phi,\{7\}\}\Rightarrow\{2,7\}\in P(N)\wedge\{2,7\}\notin P(\{7\})\Rightarrow\underline{\underline{\{2,7\}\in P(N)\setminus P(\{7\})}}$$

$$but\quad\{2,7\}\not\subseteq N\setminus\{7\}\Rightarrow\underline{\underline{\{2,7\}\notin P(N\setminus\{7\})}}$$

<u>שאלה 2:</u>

א. (5 נק') הגדירו מהו יחס טרנזיטיבי.

תהי A קבוצה ויהיה R יחס על A. נאמר ש-R הוא טרנזיטיבי אם

$$aRb \wedge bRc \quad for \quad some \quad a,b,c \in A \quad \Rightarrow \quad aRc$$

ב. (10 נק') יהי S יחס שקילות מעל קבוצה A ובו (ביחס) חמישה איברים (חמישה זוגות סדורים מאברי A). מה יכול להיות מספר האיברים ב A? התייחסו לכל האפשרויות ונמקו את תשובתכם.

ב-A לכל הפחות 3 אייברים היות ו- $\left|A^2\right| = |A|^2$. כמו כן ב-A לכל היותר 5 אייברים היות ו- $\{(a,a): a \in A\} \subseteq S$.

<u>אופציה I :</u> **ב-A 3 אייברים**- אז בדיוק 3 מאייברי S הם מהצורה (a,a), ולכן עבור שני האייברים הנותרים נקבל (a,b),(b,a). סה"כ:

$$\begin{cases} A = \{a,b,c\} \\ S = \{(x,x): \forall x \in A\} \cup \{(y,z) \quad for \quad some \quad y,z \in A\} \end{cases}$$

אם ב-A 4 אייברים אז בדיוק 4 מאייברי S הם מהצורה (a,a), ונותר איבר בודד שהוא בהכרח מהצורה (a,b) עבור a,b שונים, ולכן בהכרח הסימטריות תיפגע. לכן |A| לא יכול להיות 4.

<u>אופציה II :</u> **ב-A 5 אייברים**- אז בדיוק 5 מאייברי S הם מהצורה. סה"כ:

$$\begin{cases} A = \{a,b,c,d,e\} \\ S = \{(x,x): \forall x \in A\} \end{cases}.$$

ג. (10 נק') תהא A קבוצת הסדרות באורך 100 של מספרים טבעיים. R הוא יחס על A המוגדר כך: $(a_1,a_2,\ldots,a_{100})R(b_1,b_2,\ldots,b_{100})$ אם ורק אם קיים אינדקס i כך ש- $a_i = b_i$. האם R יחס שקילות? אם כן תארו את קבוצת המנה.

רפלקסיבי $\forall(a_1,\ldots,a_{100}) \in A \quad \exists i=1: a_1 = a_1 \Rightarrow (a_1,\ldots,a_{100})R(a_1,\ldots,a_{100}) \Rightarrow$

סימטרי $(a_1,a_2,\ldots,a_{100})R(b_1,b_2,\ldots,b_{100}) \Rightarrow \quad \exists i: a_i = b_i \Rightarrow \quad \exists i: b_i = a_i \Rightarrow (b_1,b_2,\ldots,b_{100})R(a_1,a_2,\ldots,a_{100}) \Rightarrow$

$$(\underline{1},2,3,\ldots,100)R(\underline{1},102,103,\ldots,200) \wedge (1,\underline{\underline{102}},103,\ldots,200)R(101,\underline{\underline{102}},203,\ldots,300) \quad but \quad (\underline{1},2,3,\ldots,100)\not{R}(101,\underline{\underline{102}},203,\ldots,300)$$

לכן לא טרנזיטיבי ולכן לא יח"ש.

<u>שאלה 3:</u>

א. (9 נק') תהיינה D,C,B,A קבוצות ו- $f: A \to B, g: B \to C, h: C \to D$ פונקציות.

הוכח/הפרך **אחד מהסעיפים i-ii**:

i. $h \circ g \circ f$ על גורר ש- $g \circ f$ על.

$A = B = C = \{1,2\}, D = \{1\}$

הפרכה: $f(x) = x, g(x) = h(x) = 1$

$\forall y \in D \quad \exists x \in A : hgf(x) = y \quad but \quad 2 \in C : \quad gf(x) \neq 2 \quad \forall x \in A$

ii. $g \circ f$ הפיכה ו- $h \circ g$ הפיכה גורר ש- g הפיכה.

הוכחה: $g \circ f$ הפיכה<= $g \circ f$ על <= g על.

$h \circ g$ הפיכה <= $h \circ g$ חח"ע <= g חח"ע.

סה"כ g הפיכה.

ב. (8 נק') תהיינה B,A קבוצות. נגדיר $f : P(A) \to P(B)$ ע"י $f(X) = X \cap B$.

הוכיחו כי f חח"ע אם ורק אם $A \subseteq B$.

$A \subseteq B$ <= כל תת קב' X של A מקיימת $X \subseteq B$ ולכן $f(X) = X \cap B = X$ שהיא חח"ע.

f חח"ע. נניח ש- $A \not\subseteq B$ <= קיים איבר x ב-A שאיננו ב-B <= {x} וקב' ריקה ב-P(A) כך שתמונת שתיהן תחת f היא קב' ריקה בסתירה לחד-חד-ערכיות f.

ג. (8 נק') יהיו B,A קבוצות שוות עוצמה ויהיו $a \in A, b \in B$. הוכח $|A \setminus \{a\}| = |B \setminus \{b\}|$.

$$|A| = |B| \Rightarrow \exists f \text{הפיכה} : A \to B \Rightarrow \exists f(a) \in B \wedge \exists f^{-1}(b) \in A$$

נגדיר:

$$g : A \setminus \{a\} \to B \setminus \{b\}$$

ע"י:

$$\forall x \in A \setminus \{a\} \quad g(x) = \begin{cases} f(x), x \neq f^{-1}(b) \\ f(a), x = f^{-1}(b) \end{cases}$$

כלומר, נבנה את g בדיוק כמו f בכל נקודה פרט לכך שנשלח את מקור הנק' החסרה בטווח $\leftarrow f^{-1}(b)$ לתמונת הנק' החסרה בתחום $\leftarrow f(a)$.

<u>נראה ש g על:</u>

$\forall y \in B \setminus \{b\}$

$$\left(y \in \left(B \setminus \{b\}\right) \setminus f(a)\right) \quad \vee \quad \left(y = f(a)\right)$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$f \text{הפיכה} \Rightarrow \exists x \in \left(A \setminus \{a\}\right) \setminus f^{-1}(b) : y = f(x) = g(x) \qquad \exists f^{-1}(b) \in A : y = f(a) = g(f^{-1}(b))$$

$$\Rightarrow \forall y \in B \setminus \{b\} \quad \exists x \in \left(A \setminus \{a\}\right) : y = g(x) \Rightarrow g \text{ על}$$

נראה ש g חח"ע:

$$u \neq v$$

$$if \quad u,v \neq f^{-1}(b) \quad then \quad g(u) = f(u) \neq f(v) = g(v) \quad \text{חח"ע} \quad f \text{ כי}$$

$$if \quad u \neq f^{-1}(b) \wedge v = f^{-1}(b) \quad then$$

$$g(u) = f(u) \in (B \setminus \{b\}) \setminus f(a) \wedge g(v) = f(a) \Rightarrow g(u) \neq g(v)$$

ולכן g חח"ע.

שאלה 4:

א. (12 נק') בדוק האם שני הפסוקים שקולים, ללא שימוש בטבלת אמת:
$\left(p \to q\right) \to p \;\; ; \;\; p \to \left(q \to p\right)$.

לא שקולים. אם $q = F \;\; p = F$ אז $p \to \left(q \to p\right) = T \;\; ; \;\; \left(p \to q\right) \to p = F$

ב. (13 נק') פשטו את הביטוי: $\neg(p \vee q) \wedge q \vee r$.

$$\neg(p \vee q) \wedge q \vee r \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \wedge q \vee r \Leftrightarrow \neg p \wedge F \vee r \Leftrightarrow F \vee r \Leftrightarrow r$$

שאלה 5:

א. (13 נק') מהו מספר האפשרויות לחלוקת 315 כדורים זהים ל-7 תאים, כך שבכל תא יותר מ-4 כדורים.

$$x_1 + \ldots + x_7 = 315 : x_i > 4 \Rightarrow x_i \geq 5$$

$$\text{שקול}: y_1 + \ldots + y_7 = 315 - 5*7 = 280 : y_i = x_i - 5 \geq 0 \Rightarrow \binom{280+7-1}{7-1}$$

ב. (12 נק') כמה מספרים שש-ספרתיים בנויים מהספרות 2,3,9 וגם מתחלקים ב-3?

סכום כל הספרות חייב להתחלק ב-3. מכיוון ש-9 ו-3 מתחלקים ב-3, סכום כל ה-2-ים חייב להתחלק ב-3. לכן יש 0 או 3 או 6 2-ים:

$$\begin{array}{ccc} 2^6 + & \binom{6}{3} \cdot 2^3 & +1 = 225 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 3 & 6 \\ \text{ים-}2 & \text{ים-}2 & \text{ים-}2 \\ & \text{כולל} & \\ & \text{בחירת} & \\ & \text{מקום} & \\ & \text{בישבילם} & \end{array}$$

שאלה 6:

מצא נוסחת נסיגה (כולל תנאי התחלה) למספר הדרכים לבניית מילה מאורך n מעל {0,1,2} שאינה מכילה:

יהי A_i מספר חוקי מאורך i, ו- $f(i)$ מספר הדרכים ליצור אותו.

נחפש $f(n)$. (נסמן באופן לא פורמלי $f^{(t)}(i)$ עבור מספר מאורך i שנגמר בסיפרה t).

א. (8 נק') 01

$$f(n)=2f^{(0)}(n-1)+3f^{(1)}(n-1)+3f^{(2)}(n-1)+\underbrace{f^{(0)}(n-1)-f^{(0)}(n-1)}_{\substack{\text{מכיוון ששארו 1,2 ויש}\\ \text{מגבלה למה שמופיע לפני 1.}\\ \text{אבל אין מגבלה לפני 0}}}$$

$$=3f(n-1)-f(n-2)$$

$$f(1)=3$$
$$f(2)=8$$

ב. (8 נק') 12

בדיוק כמו קודם כאשר 1 בתפקיד 0 ו-2 בתפקיד 1:

$$f(n)=3f^{(0)}(n-1)+2f^{(1)}(n-1)+3f^{(2)}(n-1)+\underbrace{f^{(1)}(n-1)-f^{(1)}(n-1)}_{\substack{\text{מכיוון ששארו 0,2 ויש}\\ \text{מגבלה למה שמופיע לפני 2.}\\ \text{אבל אין מגבלה לפני 1}}}$$

$$=3f(n-1)-f(n-2)$$

$$f(1)=3$$
$$f(2)=8$$

ג. (9 נק') 01,12

$$f(n)=2f^{(0)}(n-1)+2f^{(1)}(n-1)+3f^{(2)}(n-1)$$

לפני 2 יש מיגבלה, אך גם אם נשלים את המיקרים 0,1 תהיה מיגבלה על מה שבא לפני 1. נבדוק את מי מבין המיקרים 1 או 2 עדיף לפתח:

$$f^{(1)}(n-1)=f^{(1)}(n-2)+f^{(2)}(n-2)+\underbrace{f^{(0)}(n-2)-f^{(0)}(n-2)=f(n-2)-f(n-3)}_{\text{כי לפני 0 אין מיגבלה}}$$

$$f^{(2)}(n-1)=f^{(0)}(n-2)+f^{(2)}(n-2)$$

לכן, במקרה של 2 תמיד נישאר עם מיגבלה ונעדיף לעבוד עם 1:

$$f(n)=2f^{(0)}(n-1)+2f^{(1)}(n-1)+3f^{(2)}(n-1)+f^{(0)}(n-1)+f^{(1)}(n-1)-\underbrace{f^{(0)}(n-1)}_{=f(n-2)}-\underbrace{f^{(1)}(n-1)}_{\substack{\text{נציב מהחישוב}\\ \text{של קודם}}}=$$

$$3f(n-1)-2f(n-2)+f(n-3)$$

$$f(1)=3$$

$$f(2)=7$$

$$f(3)=16$$

בהצלחה!