אינפי 3 תרגיל 1

1)

א. הוכיחו את "אי שיוויון המשולש השני" במרחב נורמי – $|(\|u\|-\|v\|)| \le \|u \pm v\|$

ב. הסיקו שאם סדרת וקטורים $\{u_n\}$ מקיימת $\|u_n - u\| \to 0$ אז היא מקיימת $\|u_n\| \to \|u\|$.

א. נוכיח $|(\|u\|-\|v\|)| \le \|u-v\|$ ואז האי שיוויון האחר נובע ממנו כי

$$|(\|u\|-\|v\|)| = |(\|u\|-\|-v\|)| \le \|u-(-v)\| = \|u+v\|$$

בשביל להוכיח ש- $|(\|u\|-\|v\|)| \le \|u-v\|$ נשים לב ש- $u = v + (u-v)$ ולכן, לפי אי שיוויון המשולש, $\|u\| \le \|v\| + \|u-v\|$. נעביר אגפים ונקבל $\|u\| - \|v\| \le \|u-v\|$.
מאותה סיבה $\|v\| - \|u\| \le \|v-u\|$, אבל $\|u-v\| = \|v-u\|$ ולכן

$$\|u-v\| \ge \max\{\|u\|-\|v\|, \|v\|-\|u\|\} = |(\|u\|-\|v\|)|$$

ב. לפי האי שיוויון $0 = |(\|u_n\|-\|u\|)| \le \|u_n - u\| \to 0$ ולפי משפט הסנדוויץ' $|(\|u_n\|-\|u\|)| \to 0$. לכן $\|u_n\| - \|u\| \to 0$ ולכן $\|u_n\| \to \|u\|$.

2) יהי V ממ"פ, ותהי $\{x_1, \dots, x_n\}$ קבוצה אורתונורמלית. יהי $x \in V$ כלשהו. הוכיחו שמתקיים:

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, x\rangle|^2 \le \|x\|^2$$

נביט במרחב הווקטורי $\mathrm{Span}\{x_1, \dots, x_n, x\}$.

אם x הוא צירוף ליניארי של $\{x_1, \dots, x_n\}$ נגדיר $k = n$, ונביט בתת מרחב $W = \mathrm{Span}\{x_1, \dots, x_n\} = \mathrm{Span}\{x_1, \dots, x_k\}$ ש- x שייך לתוכו.

אחרת, גדיר $k = n+1$, ונביט בתת מרחב $W = \mathrm{Span}\{x_1, \dots, x_n, x\}$ ה- k מימדי. ניתן לפי תהליך גרהם שמידט השלים את $x_1, \dots, x_n$ לבסיס אורתונורמלי $\{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$ של W ואז $W = \mathrm{Span}\{x_1, \dots, x_{n+1}\} = \mathrm{Span}\{x_1, \dots, x_k\}$.

בכל מקרה $\{x_1, \dots, x_k\}$ קבוצה אורתונורמלית, $x \in W = \mathrm{Span}\{x_1, \dots, x_k\}$ ו- $k \ge n$. נציג את x לפי הבסיס הזה $x = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i$ ואז, לפי ליניאריות,

$$\|x\|^2 = |\langle x, x\rangle| = \left|\langle \sum_{i=1}^{k} a_i x_i, \sum_{j=1}^{k} a_j x_j \rangle\right| = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \left|a_i a_j \langle x_i, x_j\rangle\right|$$

בגלל אורתונורמליות של $\{x_1, \dots, x_k\}$ $\langle x_i, x_j\rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \ne j \end{cases}$ ולכן $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{k} |a_i|^2$

ומהם a_i? לפי ליניאריות $\langle x_i, x\rangle = \langle x_i, \sum_{j=1}^{k} a_j x_j\rangle = \sum_{j=1}^{k} a_j\langle x_i, x_j\rangle = a_i$. ולכן

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{k}|a_i|^2 \geq \sum_{i=1}^{n}|a_i|^2$$

שכן $k \geq n$.

3) יהיו $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ מרחבים נורמיים, מי מהפונקציות הבאות:
היא נורמה על $X \times Y$? **הוכיחו!** החיבור והכפל בסקלר ב- $X \times Y$ מוגדרים איבר-איבר.
א. $\|(x,y)\|_1 = \|x\|_X + \|y\|_Y$.
ב. $\|(x,y)\|_2 = \|x\|_X \cdot \|y\|_Y$.
ג. $\|(x,y)\|_3 = \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}$.

בסעיף ב' זה לא מרחב נורמי, אלה אם X ו- Y שניהם מרחבים 0 מימדיים $X = Y = \{0\}$, ואז טכנית $\|(x,y)\|_2 = 0$ היא אכן נורמה.

אם X לא 0 מימדי ישנו $x \neq 0$. ואז $(x,0)$ אינו וקטור ה- 0 ב- $X \times Y$, ולפי אקסימות הנורמה אמור להתקיים $\|(x,y)\|_2 \neq 0$. אבל $\|(x,0)\|_2 = \|x\|_X \cdot \|0\|_Y = \|x\|_X \cdot 0 = 0$. אם אם Y לא 0 מימדי מפריכים בצורה דומה.

בשני בסעיפים האחרים זו אכן נורמה. נוכיח את שניהם ביחד. בשביל להוכיח שאילו נורמות יש להוכיח

i) $\|(x,y)\| \geq 0$: מכיוון שלכל (x,y) $\|x\|_X, \|y\|_Y \geq 0$ אז $\|(x,y)\|_1 = \|x\|_X + \|y\|_Y \geq 0$ וגם $\|(x,y)\|_3 = \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\} \geq 0$.

ii) $\|(x,y)\| = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (\bar{0},\bar{0})$: ברור ש- $\|(\bar{0},\bar{0})\|_1 = \|(\bar{0},\bar{0})\|_3 = 0$. אם $(x,y) \neq (\bar{0},\bar{0})$ אז $x \neq \bar{0}$ שגורר $\|x\|_X > 0$ או $y \neq \bar{0}$ שגורר $\|y\|_Y > 0$. בכל מקרה $\|(x,y)\|_1 = \|x\|_X + \|y\|_Y > 0$ וגם $\|(x,y)\|_3 = \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\} > 0$.

iii) $\|\lambda(x,y)\| = \lambda\|(x,y)\|$:

$$\begin{aligned}\|\lambda(x,y)\|_1 &= \|(\lambda x, \lambda y)\|_1 = \|\lambda x\|_X + \|\lambda y\|_Y = |\lambda|\|x\|_X + |\lambda|\|y\|_Y \\ &= |\lambda|(\|x\|_X + \|y\|_Y) = |\lambda|\|(x,y)\|_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\lambda(x,y)\|_3 &= \|(\lambda x, \lambda y)\|_3 = \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\} = \max\{|\lambda|\|x\|_X, |\lambda|\|y\|_Y\} \\ &= |\lambda|\max\{|\lambda|\|x\|_X, |\lambda|\|y\|_Y\} = |\lambda|\|(x,y)\|_3\end{aligned}$$

iv) $\|(x_1,y_1) + (x_2,y_2)\| \leq \|(x_1,y_1)\| + \|(x_2,y_2)\|$:

$$\begin{aligned}\|(x_1,y_1) + (x_2,y_2)\|_1 &= \|(x_1 + x_2, y_1 + y_2)\|_1 = \|x_1 + x_2\|_X + \|y_1 + y_2\|_Y \\ &\leq \|x_1\|_X + \|x_2\|_X + \|y_1\|_Y + \|y_2\|_Y \\ &= \|x_1\|_X + \|y_1\|_Y + \|x_2\|_X + \|y_2\|_Y = \|(x_1,y_1)\|_1 + \|(x_2,y_2)\|_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\|_3 &= \|(x_1+x_2,y_1+y_2)\|_3 = \max\{\|x_1+x_2\|_X,\|y_1+y_2\|_Y\}\\ &\le \max\{\|x_1\|_X,\|y_1\|_Y\}+\max\{\|x_2\|_X,\|y_2\|_Y\}\\ &= \|(x_1,y_1)\|_3+\|(x_2,y_2)\|_3\end{aligned}$$

הסיבה לאי שיוויון היא ש-

$$\|x_1+x_2\|_X \le \|x_1\|_X+\|x_2\|_X \le \max\{\|x_1\|_X,\|y_1\|_Y\}+\max\{\|x_2\|_X,\|y_2\|_Y\}$$

וגם

$$\|y_1+y_2\|_Y \le \|y_1\|_Y+\|y_2\|_Y \le \max\{\|x_1\|_X,\|y_1\|_Y\}+\max\{\|x_2\|_X,\|y_2\|_Y\}$$

ולכן

$$\max\{\|x_1+x_2\|_X,\|y_1+y_2\|_Y\} \le \max\{\|x_1\|_X,\|y_1\|_Y\}+\max\{\|x_2\|_X,\|y_2\|_Y\}$$

4) הוכיחו את הזהויות הבאות:

א. במרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$: $\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2)$

ב. במרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$:

$$\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2+i\|u+iv\|^2-i\|u-iv\|^2)$$

זכרו שבמרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ מתקיים $\langle u,v\rangle \in \mathbb{R}$ ו- $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$ ובמרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$ מתקיים $\langle u,v\rangle \in \mathbb{C}$ ו- $\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$.

א) נוכיח

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2) &= \frac{1}{4}(\langle u+v,u+v\rangle-\langle u-v,u-v\rangle)\\ &= \frac{1}{4}(\langle u,u+v\rangle+\langle v,u+v\rangle-\langle u,u-v\rangle-\langle -v,u-v\rangle)\\ &= \frac{1}{4}(\langle u,u+v\rangle+\langle v,u+v\rangle+\langle u,v-u\rangle+\langle v,u-v\rangle)\\ &= \frac{1}{4}(\langle u,u+v+v-u\rangle+\langle v,u+v+u-v\rangle)\\ &= \frac{1}{4}(\langle u,2v\rangle+\langle v,2u\rangle) = \frac{1}{4}(2\langle u,v\rangle+2\langle v,u\rangle) = \langle u,v\rangle\end{aligned}$$

השיוויון השני הוא אדטיביות במשתנה הראשון.

בשיוויון השלישי הכנסו את ה "−" לתוך סוגרי המכפלה הפנימית.

השיוויון הרביעי הוא אדטיביות במשתנה השני.

בשיוויון האחרון השתמשנו ב- $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$

ב) כל השיוויונות שהוכחנו בסעיף א', מלבד האחרון, עדיין תקפים, ולכן

$$\frac{1}{4}(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2)=\frac{1}{4}(2\langle u,v\rangle+2\langle v,u\rangle)=\frac{1}{2}\left(\langle u,v\rangle+\overline{\langle u,v\rangle}\right)$$

וכן

$$\begin{aligned}\langle u,v\rangle=\frac{1}{4}(i\|u+iv\|^2-i\|u-iv\|^2)=\langle u,v\rangle=\frac{i}{4}(\|u+iv\|^2-\|u-iv\|^2)\\ =\frac{i}{2}\left(\langle u,iv\rangle+\overline{\langle u,\imath v\rangle}\right)=\frac{i}{2}\left(\bar{\imath}\langle u,v\rangle+\overline{\bar{\imath}\langle u,v\rangle}\right)\\ =\frac{i}{2}\left(-i\langle u,v\rangle+i\overline{\langle u,v\rangle}\right)=\frac{1}{2}\left(\langle u,v\rangle-\overline{\langle u,v\rangle}\right)\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2+i\|u+iv\|^2-i\|u-iv\|^2)\\ =\frac{1}{2}\left(\langle u,v\rangle+\overline{\langle u,v\rangle}\right)+\frac{1}{2}\left(\langle u,v\rangle-\overline{\langle u,v\rangle}\right)=\langle u,v\rangle\end{aligned}$$

5) הוכיחו שאם מרחב מכפלה פנימית $(V,\|\cdot\|)$ מעל $\mathbb{R}$ מקיים את אי שיוויון המקבילית:

$$\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=2\|u\|^2+2\|v\|^2$$

אז הפונקציה $\langle u,v\rangle=\frac{1}{4}(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2)$ היא מכפלה פנימית מעל V שמשרה את הנורמה $\|\cdot\|$.

i) מתקיים ש-

$$\langle u,u\rangle=\frac{1}{4}(\|u+u\|^2-\|u-u\|^2)=\frac{1}{4}(\|2u\|^2-\|\bar{0}\|^2)=\frac{1}{4}(4\|u\|^2)=\|u\|^2$$

ולכן $\|u\|=\sqrt{\langle u,u\rangle}$. ז״א שאם $\langle u,v\rangle$ היא אכן מכפלה פנימית אז היא משרה את הנורמה $\|u\|$ שלנו.

ii) לפי חוקי נורמה $\langle u,u\rangle=\|u\|^2\geq 0$ ו- $\langle u,u\rangle=\|u\|^2\geq 0\Leftrightarrow u=\bar{0}$

iii) הסימטריות של $\langle u,v\rangle$ טריוויאלית.

$$\langle u,v\rangle=\frac{1}{4}(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2)=\frac{1}{4}(\|v+u\|^2-\|v-u\|^2)=\langle v,u\rangle$$

iv) נוכיח קודם אדטיביות, ז״א $\langle u+v,w\rangle=\langle u,w\rangle+\langle v,w\rangle$, או את הביטוי השקול $8\langle u+v,w\rangle-8\langle u,w\rangle-8\langle v,w\rangle=0$. (הכפלתי הכל ב- 4 כדי להיפתרן משברים במשוואות)

$$\begin{aligned}8\langle u+v,w\rangle-8\langle u,w\rangle-8\langle v,w\rangle\\ =2\|u+v+w\|^2-2\|u+v-w\|^2-2\|u+w\|^2\\ +2\|u-w\|^2-2\|v+w\|^2+2\|v-w\|^2\\ =2\|u+v+w\|^2-2\|u+v-w\|^2\\ +2(\|u-w\|^2+\|v-w\|^2)-2(\|u+w\|^2+\|v+w\|^2)\end{aligned}$$

לפי אי שיוויון המקבילית:

$$2(\|u \pm w\|^2 + \|v \pm w\|^2) = \|u + v \pm 2w\|^2 + \|u - v\|^2$$

ולכן הביטוי שלנו שווה ל-

$$\begin{aligned}2\|u+v+w\|^2 - 2\|u+v-w\|^2 + \|u+v-2w\|^2 + \|u-v\|^2 - \|u+v+2w\|^2 \\ - \|u-v\|^2 \\ = 2\|u+v+w\|^2 - 2\|u+v-w\|^2 + \|u+v-2w\|^2 \\ - \|u+v+2w\|^2 \\ = (\|u+v-2w\|^2 - 2\|u+v-w\|^2) \\ - (\|u+v+2w\|^2 - 2\|u+v+w\|^2)\end{aligned}$$

גם לפי אי שיוויון המקבילית:

$$2(\|u + v \pm w\|^2 + \|\pm w\|^2) = \|u + v \pm 2w\|^2 + \|u + v\|^2$$

ששקול ל-

$$\|u + v \pm 2w\|^2 - 2\|u + v \pm w\|^2 = 2\|\pm w\|^2 - \|u + v\|^2$$

ולכן הביטוי שלנו שווה ל-

$$(2\|w\|^2 - \|u + v\|^2) - (2\|-w\|^2 - \|u + v\|^2) = 0$$

v) לבסוף נוכיח מולטיפלטיביות, ז"א $\langle au, w\rangle = a\langle u, w\rangle$.
זה נעשה בשלבים.

א) נוכיח זאת באינדוקציה שלמספר טבעי $a \in \mathbb{N}$ מתקיים $\langle au, w\rangle = a\langle u, w\rangle$:
עבור $a = 1$ $\langle 1u, w\rangle = \langle u, w\rangle = 1\langle u, w\rangle$.
נניחבאינדוקציה ש $\langle (a-1)u, w\rangle = (a-1)\langle u, w\rangle$
ואז לפי אדטיביות

$$\begin{aligned}\langle au, w\rangle = \langle \big((a-1)+1\big)u, w\rangle = \langle (a-1)u, w\rangle + \langle u, w\rangle \\ = (a-1)\langle u, w\rangle + \langle u, w\rangle = a\langle u, w\rangle\end{aligned}$$

וסיימנו.

ב) עבור $a = 0$ זה מיידי:

$$\langle 0u, w\rangle = \langle \bar{0}, w\rangle = \frac{1}{4}(\|\bar{0} + w\|^2 - \|\bar{0} - w\|^2) = 0 = 0\langle u, w\rangle$$

ג) עבור $a \in \mathbb{Z}$ שלילי אנחנו יודעים ש $\langle (-a)u, w\rangle = (-a)\langle u, w\rangle = -a\langle u, w\rangle$ מסעיף א'.
לפי אדטיביות וסעיף ב' $\langle au, w\rangle + \langle (-a)u, w\rangle = \langle \big(a + (-a)\big)u, w\rangle = \langle 0u, w\rangle = 0$
ולכן גם $\langle (-a)u, w\rangle = -\langle au, w\rangle$. נובע ש- $-\langle au, w\rangle = -a\langle u, w\rangle$. נצמצם את ה- "$-$"
וסיימנו.

עד כאן הוכחנו $\langle au, w\rangle = a\langle u, w\rangle$ לכל $a \in \mathbb{Z}$.

ד) עבור $a = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$, כאשר n, m שלמים, מתקיים $n = ma$. לפי הסעיפים הקדודמים

$$m\langle au, w\rangle = \langle mau, w\rangle = \langle nu, w\rangle = n\langle u, w\rangle = ma\langle u, w\rangle$$

נצמצם m וסיימנו.

ה) עבור $a \in \mathbb{R}$ כללי ניקח סדרה $\{a_n\} \subseteq \mathbb{Q}$ ששואפת ל- a. מתקיים ש- $(a - a_n) \to 0$ ולכן $\|(a - a_n)u\| = |a - a_n|\|u\| \to 0$. $(a - a_n)u = (au \pm w) - (a_n u \pm w)$ ולכן

$$\|(au \pm w) - (a_n u \pm w)\| \to 0$$

לפי שאלה 1

$$\|au \pm w\| - \|a_n u \pm w\| \to 0$$

ולכן

$$\langle au, w\rangle - \langle a_n u, w\rangle = \frac{1}{4}(\|au + w\| - \|a_n u + w\| - \|au - w\| + \|a_n u - w\|) \to 0$$

ז״א $\langle a_n u, w\rangle \to \langle au, w\rangle$. ברור גם ש- $a_n\langle u, w\rangle \to a\langle u, w\rangle$. לפי סעיף ד׳ $\langle a_n u, w\rangle = \langle au, w\rangle$ ולפי יחידות הגבול $\langle au, w\rangle = a\langle u, w\rangle$.