תורת החבורות 88-218-01 תשפ"א
הערות הרצאה 5

תזכורת 0.1. פעולה של חבורה G על קבוצה X היא הומומורפיזם $\varphi\colon G \to S_X$.

תרגיל 0.2 (השלמה)**.** יהי p ראשוני, ותהי G חבורה מסדר p^2. הוכיחו כי G אבלית.

דוגמה 0.3. החבורות $\mathbb{Z}_{p^2}$ או $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ הן אבליות מסדר p^2.

פתרון. החבורה G פועלת על עצמה על ידי הצמדה.

$$g * x = gxg^{-1}$$

פעולת ההצמדה היא מספיק חשובה שיש שמות מיוחדים למסלולים, הם נקראים מחלקות צמידות ומסומנים $\operatorname{conj}(x)$. יש שם מיוחד למייצב של x והוא המְרַכֵּז של x הוא

$$\operatorname{stab}(x) = C_G(x) = \{g \in G \mid gx = xg\}$$

קל לשים לב כי $Z(G) = \bigcap_{x \in G} C_G(x)$. בפרט $Z(G) \subseteq C_G(x)$.

לפי משפט לגראנז' הסדר של $Z(G)$ מחלק את p^2. ראינו כי $|Z(G)| \neq 1$ כי G היא חבורת-p סופית. לכן $|Z(G)| \in \{p, p^2\}$. אם $|Z(G)| = p^2$, אז $Z(G) = G$, וסיימנו.

אחרת, נניח בשלילה כי $|Z(G)| = p$. לכן קיים $x \in G \setminus Z(G)$. נתבונן במְרַכֵּז שלו $C_G(x)$. אז

$$|C_G(x)| \geq 1 + |Z(G)|$$

כי $x \in C_G(x)$ וגם $Z(G) \subseteq C_G(x)$. כל מְרַכֵּז הוא תת־חבורה. לכן $|C_G(x)|$ מחלק את p^2 לפי משפט לגראנז', ובהכרח $|C_G(x)| = p^2$. לכן $x \in Z(G)$. זו סתירה לכך ש-$x \notin Z(G)$. לכן $|Z(G)| \neq p$.

הערה 0.4. מה קורה עם חבורות מסדר p^3? אז כבר יש חבורות לא אבליות כמו

$$H(\mathbb{Z}_p) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{Z}_p \right\}$$

0.1 גרעין ותמונה

הגדרה 0.5. יהי $f\colon G \to H$ הומומורפיזם. הגרעין שלו הוא

$$\ker f = \{g \in G \mid f(g) = e_H\}$$

והתמונה של f היא

$$\operatorname{im} f = \{f(g) \mid g \in G\} = \{h \in H \mid \exists g \in G, f(g) = h\}$$

דוגמה 0.6. עבור ההומומורפיזם

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}_n \\ a &\mapsto a \pmod n \end{aligned}$$

הגרעין הוא $\ker\varphi = n\mathbb{Z}$, והתמונה היא $\operatorname{im}\varphi = \mathbb{Z}_n$.

עבור ההומומורפיזם

$$\begin{aligned} \det\colon GL_n(F) &\to F^* \\ A &\mapsto \det(A) \end{aligned}$$

הגרעין הוא $\ker(\det) = SL_n(F)$ והתמונה היא $\operatorname{im}(\det) = F^*$.

טענה 0.7. יהי $f\colon G \to H$ הומומורפיזם. אז $\ker f \leq G$ וגם $\operatorname{im} f \leq H$.

הוכחה. $f(e_G) = e_H$. לכן $\ker f \neq \varnothing$. אם $g_1, g_2 \in \ker f$

$$f(g_1 g_2^{-1}) = f(g_1) f(g_2)^{-1} = e_H e_H^{-1} = e_H$$

ולכן $g_1 g_2^{-1} \in \ker f$. לגבי התמונה, זה גם קל. □

0.2 תת־חבורות נורמליות

דוגמה 0.8. תהי G חבורה ותהי X קבוצת כל תת־החבורות של G. אז G פועלת על X לפי הצמדה. כלומר לכל $g \in G$ ולכל $H \in X$ הפעולה היא

$$g * H = gHg^{-1} = \left\{ghg^{-1} \,\middle|\, h \in H\right\}$$

אם לא היה תרגיל בית שבו הוכחתם כי גם $gHg^{-1} \leq G$. יותר מזה $H \cong gHg^{-1}$. המסלול של H תחת הפעולה הזו כולל את כל תת־החבורות הצמודות ל-H. לנקודות השבת תחת הפעולה הזו יש שם מיוחד.

עבור $G = GL_2(F)$ נבחר את

$$H = \left\{\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in G\right\} \qquad\qquad g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ואז נקבל

$$gHg^{-1}=\left\{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}*&*\\0&*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^{-1}\in G\right\}=\left\{\begin{pmatrix}*&0\\ *&*\end{pmatrix}\in G\right\}$$

הגדרה 0.9. תהי $G\leq H$ תת־חבורה. נאמר כי H היא תת־חבורה נורמלית אם $gH=Hg$ לכל $g\in G$. מסמנים $H\lhd G$. לפעמים $H\trianglelefteq G$.

משפט 0.10. תהי $H\leq G$ תת־חבורה. התנאים הבאים שקולים:

1. לכל $g\in G$ מתקיים $gH=Hg$. כלומר $H\lhd G$.
2. לכל $g\in G$ מתקיים $g^{-1}Hg=H$.
3. לכל $g\in G$ מתקיים $g^{-1}Hg\subseteq H$.
4. החבורה G פועלת על ידי הצמדה על H.
5. כל מחלקה שמאלית של H היא מחלקה ימנית של H.
6. כל מחלקה ימנית של H היא מחלקה שמאלית של H.

הוכחה. נוכיח מה שנצליח.

1 גורר 3: יהיו $g\in G$ ו-$h\in H$. מפני $hg\in Hg=gH$. לכן קיים $h'\in H$ כך ש-$hg=gh'$. לכן

$$g^{-1}hg=h'\in H$$

לכן $g^{-1}Hg\subseteq H$.

1 גורר 2: כמו בסעיף הקודם, ובנוסף $hg^{-1}\in Hg^{-1}=g^{-1}H$. אז קיים $h''\in H$ כך שמתקיים $hg^{-1}=g^{-1}h''$, ולכן

$$h=g^{-1}h''g\in g^{-1}Hg$$

ולכן $H\subseteq g^{-1}Hg$.

2 גורר 1: יהיו $g\in G$ ו-$h\in H$. אז

$$gh=gh(g^{-1}g)=(ghg^{-1})g\in Hg$$

כי $ghg^{-1}\in H$, ולכן $gH\subseteq Hg$. באותו אופן $hg=gg^{-1}hg\in gH$, ולכן $Hg\subseteq gH$.

2 גורר 3: ברור

3 גורר 2: נשים לב שמתקיים $g^{-1}Hg\subseteq H$ וגם

$$gHg^{-1}=(g^{-1})^{1}Hg^{-1}\subseteq H$$

ולכן

$$H=(gg^{-1})H(gg^{-1})=g(g^{-1}Hg)g^{-1}\subseteq gHg^{-1}\subseteq H$$

ולכן יש שיוויונות לאורך כל הדרך.

4 גורר 3: בהגדרה של פעולה $g * h = ghg^{-1}$ יש דרישה ש-$ghg^{-1} \in H$.

3 גורר 4: ההנחה היא בדיוק שהפעולה מוגדרת היטב. נשאר להוכיח שזו אכן פעולה. כלומר שלכל $g_1, g_2 \in G$ ולכל $h \in H$:

$$g_1 * (g_2 * h) = g_1 * (g_2 h g_2^{-1}) = g_1 g_2 h g_2^{-1} g_1^{-1} = g_1 g_2 h (g_1 g_2)^{-1} = (g_1 g_2) * h$$

והצמדה באיבר היחידה לא עושה כלום $e * h = ehe^{-1} = h$.

1 גורר 5: ברור

5 גורר 1: תרגיל לבית $\square$

דוגמה 0.11. ראינו כי $G \leq G$ וגם $G/G = \{G\}$ וזו גם קבוצת המחלקות הימניות. לכן $G \lhd G$.

מה לגבי $\{e\} \leq G$. ראינו כי $g\{e\} = \{g\} = \{e\}g$ ולכן גם $\{e\} \lhd G$.

דוגמה 0.12. אם G אבלית, אז כל תת־חבורה של היא נורמלית.

דוגמה 0.13. לכל חבורה G מתקיים $Z(G) \lhd G$, למשל לפי סגירות להצמדה. לכל $g \in G$ ולכל $z \in Z(G)$ מתקיים

$$gzg^{-1} = zgg^{-1} = z$$

תרגיל 0.14. תהי G חבורה, ותהי $H \leq G$ תת־חבורה שלה מאינדקס 2. הוכיחו $H \lhd G$.

פתרון. למי ששכח $[G : H] = |G/H| = 2$.

נתון כי יש בדיוק שתי מחלקות שמאליות של H ב-G ונתון כי יש בדיוק שתי מחלקות ימניות של H ב-G. תת־החבורה H היא בעצמה מחלקה שמאלית ומחלקה ימנית. $eH = H = He$. לכן המחלקה השמאלית האחרת חייבת להיות ההפרש $G \setminus H$, וכך גם המחלקה הימנית.

לכן, אם $a \in H$, נקבל כי $aH = H = Ha$. אחרת, אם $a \notin H$ נקבל $aH = G \setminus H = Ha$. לכן H נורמלית ב-G.

דוגמה 0.15 (חשובה)**.** יהי $f \colon G \to H$ הומומורפיזם. נסמן $K = \ker f$. אז $K \lhd G$. שימו לב כי $\operatorname{im} f$ היא לא בהכרח נורמלית ב-H.

נוכיח את זה: לכל $g \in G$ ולכל $k \in K$ נחשב

$$f(g^{-1}kg) = f(g^{-1})f(k)f(g) = f(g^{-1})e_H f(g) = f(g^{-1}g) = f(e_G) = e_H$$

לכן $g^{-1}kg \in K$, ולפי המשפט נקבל $K \lhd G$.

דוגמה 0.16. לכל שדה F מתקיים $SL_n(F) \lhd GL_n(F)$. חישבנו פעם את המחלקות השמאליות והימניות וראינו שהן שוות.

$$A \cdot SL_n(F) = SL_n(F) \cdot A$$

יותר קל לשים לב כי $SL_n(F) = \ker(\det) \lhd GL_n(F)$.

אם $\varphi \colon G \to G$ הוא ההומומורפיזם הטריוויאלי. כלומר $\varphi(g) = e$ לכל $g \in G$. אז $\ker \varphi = G$ ולכן $G \lhd G$.

הערה 0.17 (אזהרה). אם $N \lhd G$ וגם $N \le H \le G$, אז $N \lhd H$. כלומר נורמליות היא תורשתית.

לעומת זאת, נורמליות היא לא טרנזיטיבית. אם $N \lhd G$ וגם $K \lhd N$, אז ייתכן כי K לא תת־חבורה נורמלית ב-G.

תרגיל 0.18 (לבית). יהי $f\colon G \to H$ הומומורפיזם, ותהי $K \le H$ תת־חבורה. הוכיחו שהתמונה הקדומה של K

$$f^{-1}(K) = \{g \in G \mid f(g) \in K\}$$

היא תת־חבורה של G. אם בנוסף $K \lhd H$, אז $f^{-1}(K) \lhd G$.

כשהוכחנו כי $\ker f \lhd G$, זה למעשה המקרה הפרטי עבור $\{e_H\} \le H$.

תרגיל 0.19. יהי $f\colon G \to H$ הומומורפיזם. ברור כי f הוא אפימורפיזם אם ורק אם $\operatorname{im} f = H$. הוכיחו כי f הוא מונומורפיזם אם ורק אם $\ker f = \{e_G\}$.

פתרון. נניח כי f חח"ע. אז לכל $x \in \ker f$ מתקיים $f(x) = e_H = f(e_G)$. אז מפני ש-f חח"ע נסיק כי $x = e_G$. כלומר $\ker f = \{e_G\}$.

בכיוון השני, נניח $\ker f = \{e_G\}$. לכל $x, y \in G$ אם $f(x) = f(y)$, אז

$$f(xy^{-1}) = f(x)f(y)^{-1} = e_H$$

ולכן $xy^{-1} \in \ker f$. כלומר $xy^{-1} = e_G$ ולכן $x = y$. במילים אחרות, הראנו f הוא מונומורפיזם.

תרגיל 0.20. יהי $f\colon G \to H$ מונומורפיזם. אז $G \cong \operatorname{im} f$.

פתרון. המונומורפיזם f משרה העתקה

$$\begin{aligned}\overline{f}\colon G &\to \operatorname{im} f\\ g &\mapsto f(g)\end{aligned}$$

קל לראות כי $\overline{f}$ הוא הומומורפיזם וגם חח"ע כי f הוא מונומורפיזם. לפי הגדרה, הוא גם על. לכן $\overline{f}$ איזומורפיזם. כלומר $G \cong \operatorname{im} f$.

דוגמה 0.21. נתבונן במונומורפיזם $f\colon \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{R}^*$ המוגדר לפי $f(0) = 1$ ו-$f(1) = -1$. אז

$$\mathbb{Z}_2 \cong \operatorname{im} f = \{-1, 1\}$$

טענה 0.22. יהי $f\colon G \to H$ הומומורפיזם. אז לכל $g \in G$ מסדר סופי מתקיים $o(f(g)) | o(g)$.

הוכחה. נסמן $n = o(g) \in \mathbb{N}$. אז

$$(f(g))^n = f(g^n) = f(e_G) = e_H$$

ולכן $o(f(g)) | o(g)$ לפי טענה ישנה שבה ראינו כי $a^m = e$ אם ורק אם $o(a) | m$. $\square$

מסקנה 0.23. אם $f\colon G\to H$ איזומורפיזם, אז $o(f(g))=o(g)$.

הוכחה. נניח כי $o(g)$ סופי, אז לפי הטענה הקודמת $o(f(g))|o(g)$. נזכר כי גם $f^{-1}\colon H\to G$ הוא איזומורפיזם. לכן

$$o(g)=o(f^{-1}(f(g)))|o(f(g))$$

ולכן $o(g)=o(f(g))$.

אם $o(g)=\infty$, ואילו $o(f(g))=m\in\mathbb{N}$, אז

$$f(g^m)=f(g)^m=e_H=f(e_G)$$

ומפני ש-f חח"ע נסיק כי $g^m=e_G$ וזו סתירה. □

דוגמה 0.24 (אזהרה)**.** לא כל שתי חבורות מאותו סדר הן איזומורפיות!

$$\mathbb{Z}_4\ncong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$$

0.3 חבורות מנה

נקשר לסייר החבורות מאת נתן קרטר (הצגנו את טבלת הכפל של $\mathbb{Z}_{12}/\langle 3\rangle$ עם השוואה לטבלת הכפל של $\mathbb{Z}_4$).

הגדרה 0.25. תהי G חבורה ותהי $H\lhd G$ תת־חבורה נורמלית. נגדיר פעולה בינארית על הקבוצה G/H לפי

$$(g_1H)\cdot(g_2H):=(g_1g_2)H$$

כך מתקבלת חבורת המנה של G מעל H (או G מודולו H).

הערה 0.26. האיברים בחבורה G/H הם מחלקות שמאליות של H ב-G. בפרט, החבורה G/H אינה תת־חבורה של G כי האיברים שלה אינם ב-G.

טענה 0.27. הפעולה לעיל מוגדרת היטב אם ורק אם H נורמלית ב-G ומעניקה ל-G/H מבנה של חבורה.

הוכחה. יהיו $g_1,x_1\in G$ כך ש-$g_1H=x_1H$ וגם $g_2,x_2\in G$ כך ש-$g_2H=x_2H$. כדי להראות שהפעולה מוגדרת היטב צריך להוכיח

$$g_1H\cdot g_2H=x_1H\cdot x_2H$$

מפני ש-$g_i=g_i\cdot e\in x_iH$ לכל i. לכן קיימים $h_1,h_2\in H$ כך ש-$g_i=x_ih_i$. אם H נורמלית, אז $x_2^{-1}Hx_2=H$. לכן קיים $h_3\in H$ כך ש-$x_2^{-1}h_1x_2=h_3$. נציב ונחשב

$$\begin{aligned}g_1g_2&=x_1h_1x_2h_2\\&=x_1x_2x_2^{-1}h_1x_2h_2\\&=x_1x_2(x_2^{-1}h_1x_2)h_2\\&=x_1x_2h_3h_2\end{aligned}$$

ומפני ש-$h_3h_2 \in H$ נקבל כי $g_1g_2 \in x_1x_2H$. מפני שמחלקות שמאליות הן מחלקות שקילות נסיק כי $g_1g_2H = x_1x_2H$. כדי שזה יהיה נכון זה צריך להיות נכון לכל x_2, ומכאן הדרישה לנורמליות.

הפעולה קיבוצית כי

$$\begin{aligned} g_1H \cdot (g_2H \cdot g_3H) &= g_1H \cdot (g_2g_3H) = (g_1g_2g_3)H \\ &= (g_1g_2)H \cdot g_3H = (g_1H \cdot g_2H) \cdot g_3H \end{aligned}$$

לכל $g_1H, g_2H, g_3H \in G/H$. איבר היחידה בחבורה G/H הוא $eH = H$. הסדר של G/H הוא $[G : H]$. $\square$

דוגמה 0.28. נבחר $G = \mathbb{Z}$. כל תת־חבורה שלה היא נורמלית, כי G אבלית. נבחר $H = n\mathbb{Z}$ עבור $n \in \mathbb{N}$. נקבל

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{0 + n\mathbb{Z}, 1 + n\mathbb{Z}, \ldots, (n-1) + n\mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}_n$$

כאשר האיזומורפיזם הוא $k + n\mathbb{Z} \mapsto k$.

דוגמה 0.29. יהיו G_1, G_2 חבורות, עם איברי יחידה e_1, e_2 בהתאמה. אז

$$G_1 \times \{e_2\} \lhd G_1 \times G_2$$

וכך גם $\{e_1\} \times G_2 \lhd G_1 \times G_2$. למשל לפי סגירות להצמדה

$$(g_1, g_2)(G_1 \times \{e_2\})(g_1, g_2)^{-1} \subseteq G_1 \times \{e_2\} \cong G_1$$

חבורת המנה היא

$$(G_1 \times G_2)/(G_1 \times \{e_2\}) = \{G_1 \times \{x\} \mid x \in G_2\} \cong G_2$$

הערה 0.30. אם H לא נורמלית ב-G, אז הפעולה של G/H אינה מוגדרת היטב.

$$\begin{aligned} g_1H &= x_1H \\ g_2H &= x_2H \end{aligned}$$

0.4 משפטי האיזומורפיזמים של נתר

משפט 0.31 (משפט האיזומורפיזם הראשון)**.** יהי $f \colon G \to H$ הומומורפיזם. אז

$$G/\ker f \cong \operatorname{im} f$$

בפרט, אם $\varphi \colon G \to H$ אפימורפיזם, אז $G/\ker\varphi \cong H$.

הוכחה. נסמן לנוחות $K=\ker f$. נגדיר העתקה

$$\begin{aligned}\eta\colon G/K &\to \operatorname{im} f\\ gK &\mapsto f(g)\end{aligned}$$

תחילה נראה כי η מוגדרת היטב. נניח $g_1K=g_2K$, אז קיים $k\in K$ כך ש-$g_2=g_1k$. לכן

$$\eta(g_1K)=f(g_1)=f(g_1)e_H=f(g_1)f(k)=f(g_1k)=f(g_2)=\eta(g_2K)$$

כלומר η לא תלויה בבחירת הנציג של המחלקות השמאליות. בנוסף η חח"ע כי g_1 ו-g_2 באותה מחלקה שמאלית של K.

כלומר $\eta(g_1K)=\eta(g_2K)$, אז $f(g_1)=f(g_2)$ ונקבל $f(g_1^{-1}g_2)=e_H$. אז $g_1^{-1}g_2\in K$. כלומר $g_1K=g_2K$.

נוכיח כי η הומומורפיזם:

$$\eta(g_1K\cdot g_2K)=\eta(g_1g_2K)=f(g_1g_2)=f(g_1)f(g_2)=\eta(g_1K)\eta(g_2K)$$

נשאר להראות כי η היא על. לכל $h\in\operatorname{im} f$ קיים $g\in G$ כך ש-$h=f(g)$. אז $\eta(gK)=f(g)=h$. בסך הכל η היא איזומורפיזם, וקיבלנו $G/\ker f\cong\operatorname{im} f$. $\square$

הערה 0.32. אפשר להוכיח גרסה אוניברסלית של הטענה לעיל: נתבונן באפימורפיזם הטבעי

$$\begin{aligned}\pi\colon G &\to G/K\\ g &\mapsto gK\end{aligned}$$

שנקרא גם ההטלה הטבעית. אז קיים איזומורפיזם יחיד $\eta\colon G/K\to\operatorname{im} f$ כך ש-$f=\eta\pi$. כלומר

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & H \\ & G/K \arrow[ur, "\eta"'] & \end{tikzcd}$$

מסקנה 0.33. ראינו שכל גרעין הוא תת־חבורה נורמלית, וכעת שכל תת־חבורה נורמלית היא גרעין של אפימורפיזם שתחומו G. כלומר $K=\ker(\pi)$ לעיל.

דוגמה 0.34. ראינו כי $\mathrm{id}\colon G\to G$ היא הומומורפיזם. לפי מה שחישבנו ומשפט האיזומורפיזם הראשון נקבל

$$G/\{e\}=G/\ker(\mathrm{id})\cong\operatorname{im}(\mathrm{id})=G$$

באופן דומה מראים כי $G/G\cong\{e\}$.

טענה 0.35. תהי G חבורה ציקלית. אז $G \cong \mathbb{Z}$ או $G \cong \mathbb{Z}_n$ עבור n טבעי כלשהו.

הוכחה. מפני ש-G ציקלית, קיים $a \in G$ כך ש-$G = \langle a \rangle$. נתבונן בהומומורפיזם $f\colon \mathbb{Z} \to G$ לפי $f(k) = a^k$. קל לראות כי f אפימורפיזם. לכן לפי משפט איזו' 1 נקבל $\mathbb{Z}/\ker f \cong G$.

הגרעין הוא תת־חבורה של $\mathbb{Z}$, וכבר ראינו שכולן מהצורה $n\mathbb{Z}$ לכל $n \geq 0$.

אם $\ker f = 0\mathbb{Z} = \{0\}$, נקבל $G \cong \mathbb{Z}$.

אם $\ker f = n\mathbb{Z}$ עבור $n \in \mathbb{N}$, אז $G \cong \mathbb{Z}_n$. □

מסקנה. חבורות ציקליות נקבעות לפי הסדר שלהן, עד כדי איזומורפיזם.

דוגמה 0.36. ראינו הומומורפיזם $f\colon \mathbb{R} \to GL_2(\mathbb{R})$ לפי

$$f(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

אז נחשב

$$\ker f = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \cos\alpha = 1, \sin\alpha = 0\} = 2\pi\mathbb{Z} = \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \langle 2\pi \rangle$$
$$\operatorname{im} f = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{R} \right\} = SO_2(\mathbb{R})$$

וממשפט האיזומורפיזם הראשון נקבל $SO_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

תרגיל 0.37 (לבית). נסמן $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. הוכיחו כי $\mathbb{T} \leq \mathbb{C}^*$ וגם $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong \mathbb{T}$.

נסמן את חבורת המטריצות האורתוגונליות הממשיות בגודל 2×2:

$$O_2(\mathbb{R}) = \left\{ A \in GL_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, AA^T = I_2 \right\}$$

אלו המטריצות עבורן $\langle A\vec{u}, A\vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$. הוכיחו $O_2(\mathbb{R}) \cap SL_2(\mathbb{R}) = SO_2(\mathbb{R})$. נסו למצוא את $[O_2(\mathbb{R}) : SO_2(\mathbb{R})]$ והסיקו כי $SO_2(\mathbb{R}) \lhd O_2(\mathbb{R})$.

דוגמה 0.38. מתקיים $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{T}^2$, שהוא טורוס דו־מימדי.