אלגברה מופשטת 1, קיץ 2013

תרגול 9

תרגיל:

הוכיחו שהמרכז של החבורה הסימטרית S_n עבור $n \geq 3$ הוא טריוויאלי. $(Z(S_n) = \{id\})$

פתרון:

נניח בשלילה שקיים $id \neq a \in Z(S_n)$. $Z(S_n) \lhd S_n$. $a \neq b \in S_n$: $\underline{bab^{-1} \in Z(S_n)}$.
יש ל־a מבנה מחזורים מסוים, יש בS_n, $a \neq b \in S_n$ עם אותו מבנה מחזורים. לכן, aוb צמודות. לכן קיימת c: $cac^{-1} = b$ אבל $cac^{-1} = acc^{-1}$ כיוון ש$a \in Z(S_n)$. ז"א $acc^{-1} = b \Leftarrow a = b$. בסתירה לכך שבחרנו $a \neq b$. לכן המרכז טריוויאלי.
מ.ש.ל $\square$

הערה:

$G \rhd H \Leftrightarrow ghg^{-1} \in H : \forall g \in G \forall h \in H$ בS_n: אם $H \lhd S_n$ אזי היא מכילה את כל התמורות ממבנה מחזורים של תמורותיה. אם H "רוצה להיות" נורמלית בS_{10} והיא מכילה את התמורה $(123)(57)$ אז היא אמורה להכיל את כל אלו: $(---)(--)$.

תרגיל:

הוכיחו שלA_4 אין תת חבורה מסדר 6.

פתרון:

$|A_4| = 12$. נניח בשלילה שקיימת ת"ח $H \leq A_4$ כך ש$|H| = 6$. $\Leftarrow \frac{|A_4|}{|H|} = [A_4 : H] = 2$ $H \lhd A_4$. יהי $\sigma \in A_4$ מחזור באורך 3 $\Leftarrow \sigma^2 \in H$ ($[G : H] = m$ אזי לכל $a \in G$: $a^m \in H$). H ת"ח ולכן גם $\sigma = \sigma^4 = \sigma^2\sigma^2 \in H \Rightarrow \sigma \in H$. כלומר כל מחזור באורך 3 שייך לH אך יש $\binom{4}{3}2! = 8$ מחזורים מאורך, וזו סתירה כי $|H| = 6 < 8$. לכן, אין לA_4 ת"ח מסדר 6. מ.ש.ל

התרגיל המרכזי

מיינו את כל החבורות מסדר 6.

פתרון:

נוכיח: $|G| = 6 \leftarrow G \cong \mathbb{Z}_6$ או $G \cong D_3$. תהא G חבורה מסדר 6.

- אם קיים איבר מסדר 6 אזי G ציקלית ולכן $G \cong \mathbb{Z}_6$.
- נניח שאין איבר מסדר 6.

- אם כל האיברים מסדר 2 אזי:
- סתירה ראשונה: G אבלית . כל האיברים מסדר 2 ואז היא איזומרפית למ"ו מעל $\mathbb{Z}_2$ ולכן הגודל שלה חזקה של 2 אבל 6 לא חזקה של 2 ולכן קיבלנו סתירה.
- סתירה אחרת:G אבלית. ניקח $1 \neq a \neq b \in G$ שני איברים מסדר 2. נתבונן במבנה $H = \{1, a, b, ab\}$. נשים לב שזו היא למעשה תת חבורה, אבל $|H| = 4 \nmid 6$ וזו סתירה למשפט לגרנז'$\Leftarrow$לא כל האיברים הם מסדר 2.
- <u>קיים איבר $a \in G$מסדר 3:</u> יהי $b \notin < a >$ ($|\langle a \rangle| = 3$)אזי $b^2 \in \langle a \rangle$ (כי $[G : \langle a \rangle] = 2$).

  טענה:$b^2 = 1$
- הוכחה: יש לפסול שני מקרים:
- $1.b^2 = a$
- $2.b^2 = a^2$

נתייחס לכל מקרה לגופו:

<u>מקרה 1</u>

אם $b^2 = a$אזי $b^6 = 1$. לכן, הסדר של $b = 1, 2, 3, 6$.

6 לא יתכן. הנחנו שאין איבר מסדר 6.

2 לא יתכן(כיא אזי $a = 1 \Leftarrow 1 = b^2 = a$)

1 לא יתכן כי $b \neq 1$

3 לא יתכן כי אזי:$b^2 = ab \Leftarrow ba = 1$ונובע ש$b \in < a >$כי הוא ההופכי של a.

<u>מקרה 2</u>

$b^2 = a^2$לא יתכן באותו אופן כמו (1). בדקו בבית.

$\Leftarrow b^2 = 1$ומ.ש.ל הטענה

כעת יש לנו איבר מסדר 3 ואיבר מסדר 2 ונראה אילו יחסים הם מקיימים:

$bab^{-1} \in \langle a \rangle$(כי $\langle a \rangle \triangleleft G$)$\Leftarrow bab^{-1} \in \{1, a, a^2\}$

א. $bab^{-1} = 1 \Rightarrow ba = b \Rightarrow a = 1$וזו סתירה.

ב.$bab^{-1} = a \Leftarrow$

- $ba = ab$
- $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{1\}$

$6 = o(ab) = lcm(3,2) \Leftarrow$ אבל הנחנו שאין איבר מסדר 6 ולכן מקרה זה לא אפשרי.

ג.זה המקרה הנותר: $bab^{-1} = a^2$ [מסגר]. נובע:

$$b \notin \langle a \rangle \wedge [G : \langle a \rangle] = 2 \Rightarrow G = \langle a \rangle \cup b \langle a \rangle = \{1, a, a^2, b, ba, ba^2\}$$

ומתקיימים היחסים: $b^2 = a^3 = 1$ וכן $bab^{-1} = a^2$. לכן $G \cong D_3$.

תרגיל:

העזרו בהוכחת משפט קיילי על מנת לשכן את D_4 בS_8.

פתרון:

כאן נשכן איבר אחד (על אף שבבית ניתן לשכן את כל השמונה):

לפי קיילי קיים מונומורפיזם $D_4 \to S_8$.

נמספר את איברי החבורה במספרים בין 1 ל8 באופן הבא:

$$D_4 = \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \{id, & \tau, & \sigma, & \tau\sigma, & \tau\sigma^2, & \tau\sigma^3, & \tau\sigma^4, & \tau\sigma^5\} \end{array}$$

המטרה: לבדוק לאיזו תמורה בS_8 עובר האיבר τ.

לפי קיילי: $\tau \mapsto l_\tau$, $l_\tau(x) = \tau x$. על מנת למצוא את l_τ נבדוק אילו ערכים היא מקבלת על כל אחד מאיברי D_4.

$$l_\tau(id) = \tau id = \tau, 1 \to 2$$
$$l_\tau(\tau) = \tau\tau = id, 2 \to 1$$
$$l_\tau(\sigma)\tau\sigma, 3 \to 6$$
$$l_\tau(\sigma^2) = \tau\sigma^2, 4 \to 7$$
$$l_\tau(\sigma^3) = \tau\sigma^3, 5 \to 8$$
$$l_\tau(\tau\sigma) = \tau\tau\sigma = \sigma, 6 \to 3$$
$$l_\tau(\tau\sigma^2) = \sigma^2, 7 \to 4$$
$$l_\tau(\tau\sigma^3) = \sigma^3, 8 \to 5$$

כלומר:

$$\tau \to (12)(36)(47)(58)$$

מ.ש.ל $\square$

פירוק חבורות אבליות

טענה 1

תהא G חבורה אבלית מסדר $p_1 ... p_k$(ראשוניים שונים). אזי $G \cong \mathbb{Z}_{p_1} \times ... \times \mathbb{Z}_{p_k}$.

למשל: חבורה אבלית מסדר 15 איזומורפית ל$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$.

טענה 2:

תהא G חבורה אבלית מסדר p^nאזי קיימים $m_1 + ... + m_k = n$ כך ש: $G \cong \mathbb{Z}_p m_1 \times ... \times \mathbb{Z}_p m_k$ למשל, אם G אבלית מסדר 27 אזי:

$$G \cong \begin{cases} \nearrow & \mathbb{Z}_{27} \\ \rightarrow & \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3 \\ \searrow & \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \end{cases}$$

הגדרה:

עבור $n \in \mathbb{N}$נסמן ב$\rho(n)$את מספר הסדרות הלא עולות $\{s_i\}_{i=1}^{r}$: $S_1 \geq S_2 \geq ... \geq S_r$.

למשל:$\rho(4) = 5$ שכן האפשרויות הן:

$(1, 1, 1, 1)$

$(1, 1, 2)$

$(1, 3)$

$(2, 2)$

(4)

טענה 3:

מס' החבורות האבליות עד כדי איזו' מסדר p^nהוא $\rho(n)$.

לסיכום:

כל חבורה אבלית מסדר $p_1^{k_1} \cdot ... \cdot p_n^{k_n}$ איזומורפית למכפלה $Hp_1 \times ... \times Hp_n$.

כאשר Hp_iהן ת"ח שאיזומורפיות לחבורה אבלית מסדר $p_i^{k_i}$.

תרגיל:

הוכיחו:$\mathbb{Z}_{100} \oplus \mathbb{Z}_{40} \cong \mathbb{Z}_{200} \oplus \mathbb{Z}_{20}$.

פתרון:

הקדמה:

$100 = 25 \cdot 4, 40 = 5 \cdot 8, 200 = 25 \cdot 8, 20 = 5 \cdot 4, (m, n) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{mn}$

ולכן:

$\mathbb{Z}_{25} \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_8 = \mathbb{Z}_{25} \oplus \mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_8 =_{(25,8)=1}= \mathbb{Z}_{200} \oplus \mathbb{Z}_{20}$. מ.ש.ל

תזכורת:

נניח $(m, n) = 1$אזי $\mathbb{Z}_{mn} \cong \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$. הפונקציות המפורשות הן:

$g:\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n\to$.$f(x)=(x(\mod m),x(\mod n))$,$f:\mathbb{Z}_{mn}\to\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n$
.$\alpha m+\beta n=1$ כאשר $g(\underline{x},y)=\beta\underline{n}x+\alpha my$,$\mathbb{Z}_{mn}$

<u>תרגיל:</u>

מצאו איזומורפיזם מפורש מ$A=\mathbb{Z}_{77}\times\mathbb{Z}_5$ ל$B=\mathbb{Z}_{11}\times\mathbb{Z}_{35}$.

<u>פתרון:</u>

שלב ראשון: הפונקציה $f:\mathbb{Z}_{77}\to\mathbb{Z}_{11}\times\mathbb{Z}_7$ המוגדרת ע"י $f(x)=(x\mod 11,x\bmod 7)$
היא איזומורפיזם.לכן גם הפונקציה $h_1:\mathbb{Z}_{77}\times\mathbb{Z}_5\to\mathbb{Z}_{11}\times\mathbb{Z}_7\times\mathbb{Z}_5$ המוגדרת ע"י
$h_1(x,y)=(x\mod 11,x\mod 7,y)$ היא איזומורפיזם (ברכיב הראשון היא
fוברכיב השני היא פונקציה קבועה).

שלב שני:הפונקציה $g:\mathbb{Z}_7\times\mathbb{Z}_5\to\mathbb{Z}_{35}$ המוגדרת ע"י $g(x,y)=15x-14y$ היא
איזומורפיזם לפי התרגיל הקודם (אכן, שימו לב שמתקיים $1=5\cdot(3)+7\cdot(-2)$).
לכן גם הפונקציה $h_2:\mathbb{Z}_{11}\times\mathbb{Z}_7\to\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_{11}\times\mathbb{Z}_{35}$המוגדרת ע"י
$h_2(x,y,z)=(x,15y-14z)$ היא איזומורפיזם.

שלב שלישי: האיזומורפיזם הדרוש הוא ההרכבה $h_2\circ h_1$ המוגדרת ע"י
$(x,y)\mapsto(x,15x-14y)$

מ.ש.ל $\square$

<u>מכפלה חצי ישרה (ישרה למחצה) פנימית</u>

<u>הגדרה:</u> אם $K,Q\leq G$ הן ת"ח המקיימות:

1. $K\lhd G$
2. $K\cap Q=\{1\}$
3. $G=KQ$

אזי אומרים ש־G היא מכפלה ישרה למחצה פנימית של K בQ. סימון: $G=K\rtimes Q$.
אגב, אם גם $Q\lhd G$ אזי מקבלים את ההגדרה של המכפלה הישרה הפנימית.

<u>תרגיל:</u>

הוכיחו שחבורת המטריצות $\left\{\begin{pmatrix}x&a\\0&1\end{pmatrix}:x\in\mathbb{F}^*,a\in F\right\}=G$ היא מכפלה
ישרה למחצה פנימית: $\underbrace{\left\{\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}:a\in\mathbb{F}\right\}}_{=A}\rtimes\underbrace{\left\{\begin{pmatrix}x&0\\0&1\end{pmatrix}:x\in\mathbb{F}^+\right\}}_{=B}$

<u>פתרון:</u>

1. צל A,B ת"ח ←קל (בדקו בבית).

2. $A \triangleleft G$: יהי $G \ni \begin{pmatrix} x & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = g$ אזי

$$gAg^{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} x & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{-b}{x} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ... \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x & xa+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{-b}{x} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & xa \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = A$$

3. $A \cap B = \{id\}$ ⇐קל. (בדקו בבית).

4. $G = AB$:

$$G \ni \begin{pmatrix} x & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

והוכחנו את הדרוש.

■