89195-09
מתמטיקה בדידה 1

סמסטר קיץ תשע"ח
מועד א'
תאריך: 06/10/18

הנחיות:

1. בטופס הבחינה שני דפים מלבד דף זה. ודאו כי כולם נמצאים בידכם.
2. בבחינה 6 שאלות.
3. הבחינה עם חומר פתוח.
4. משך הבחינה **שלוש שעות**.
5. הנכם רשאים להסתמך על סעיפים קודמים, גם אם לא השבתם עליהם.
6. **נמקו את כל תשובותיכם. פתרון ללא הוכחה לא יתקבל.**
7. ניתן להסתמך על משפטים שהוכחו במהלך ההרצאות והתרגולים בלבד ומופיעים בסיכומים המודפסים. יש לציין באופן ברור באיזה משפט נעזרים (מספר משפט ומספר הרצאה).

בהצלחה!

<u>שאלה 1 (10 נקודות)</u>

א. (5 נק') מצאו צורת CNF לפסוק הבא: $(p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg r$.

ב. (5 נק') בטאו את הפסוק $(p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg r$ באמצעות הקבוצה $\{\uparrow\}$ בלבד.

פתרון:

א.

p	q	r	$\neg q$	$(p \wedge \neg q)$	$\neg r$	$(p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg r$	$\neg((p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg r)$
T	T	T	F	F	F	T	F
T	T	F	F	F	T	T	F
T	F	T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	T	T	T	F
F	T	T	F	F	F	T	F
F	T	F	F	F	T	T	F
F	F	T	T	F	F	T	F
F	F	F	T	F	T	T	F

$$(p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg r =$$
$$= \neg\neg\big((p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg r\big) =$$
$$= \neg(p \wedge \neg q \wedge r) =$$
$$= \neg p \vee q \vee \neg r$$

ב. לפי השורה אחת לפני האחרונה בסעיף הקודם,

$$(p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg r =$$
$$= \neg(p \wedge \neg q \wedge r) =$$
$$= \neg\big((p \wedge r)\big) \wedge \neg q) =$$
$$= \neg\big(\neg\neg(p \wedge r) \wedge \neg(q \wedge q)\big) =$$
$$= \neg\big(\neg(\neg(p \wedge r) \wedge \neg(p \wedge r)) \wedge \neg(q \wedge q)\big) =$$
$$= ((p \uparrow r) \uparrow (p \uparrow r)) \uparrow (q \uparrow q)$$

<u>שאלה 2 (10 נקודות)</u>

הוכיחו את ההיסק הבא.

יש להוכיח בצורה פורמלית, תוך כדי ציון כללי ההיסק בכל שלב.

<u>הנחה</u>: $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$

<u>הנחה</u>: $\exists x(\neg Q(x) \wedge R(x))$

<u>מסקנה</u>: $\exists x(\neg P(x) \wedge R(x))$

פתרון:

1. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$ (הנחה)
2. $\exists x(\neg Q(x) \wedge R(x))$ (הנחה)
3. $\neg Q(a) \wedge R(a)$ (נובע מ-2 ע"י E.S.)
4. $R(a)$ (נובע מ-3 ע"י פישוט)
5. $\neg Q(a)$ (נובע מ-3 ע"י פישוט)
6. $P(a) \Rightarrow Q(a)$ (נובע מ-1 ע"י U.S.)
7. $\neg P(a)$ (נובע מ-5 ו-6 ע"י מודוס טולנס)
8. $\neg P(a) \wedge R(a)$ (נובע מ-7 ו-4)
9. $\exists x(\neg P(x) \wedge R(x))$ (נובע מ-8 ע"י E.G.)

<u>שאלה 3 (15 נקודות)</u>

תהיינה A, B, C קבוצות. הוכח/הפרך:

א. (7 נק') $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

ב. (8 נק') $A \cup (B \,\Delta\, C) = (A \cup B) \,\Delta\, (A \cup C)$

פתרון:

א. נכון. הוכחה:

$$\begin{aligned}
&A \setminus (B \cap C) = \\
&= A \cap \overline{(B \cap C)} \\
&= A \cap (\bar{B} \cup \bar{C}) \\
&= (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{C}) \\
&= (A \setminus B) \cup (A \setminus C)
\end{aligned}$$

ב. לא נכון. נפריך ע"י דוגמה נגדית. למשל, עבור $A=\{a\},B=\{b\},C=\{c\}$

$$A\cup(B\,\Delta\,C)=\{a\}\cup(\{b\}\,\Delta\,\{c\})=\{a\}\cup\{b,c\}=\{a,b,c\}$$

מצד שני

$$(A\cup B)\,\Delta\,(A\cap C)=\{a,b\}\,\Delta\,\{a,c\}=\{b,c\}\neq A\cup(B\,\Delta\,C)$$

<u>שאלה 4 (20 נקודות)</u>

תהיינה $\mathcal{F}$ ו-$\mathcal{G}$ שתי משפחות של קבוצות. הוכח\הפרך:

א. (10 נק') $\cup(\mathcal{F}\cap\mathcal{G})\subseteq(\cup\mathcal{F})\cap(\cup\mathcal{G})$

ב. (10 נק') $\cup(\mathcal{F}\cap\mathcal{G})=(\cup\mathcal{F})\cap(\cup\mathcal{G})$

פתרון:

א. נכון. הוכחה: עבור x שרירותי

$$x\in\cup(\mathcal{F}\cap\mathcal{G})\ \Rightarrow\exists A\in(\mathcal{F}\cap\mathcal{G}):x\in A$$

$$\Rightarrow\exists A: A\in\mathcal{F}\wedge A\in\mathcal{G}\wedge x\in A$$

$$\Rightarrow\exists A\,(A\in\mathcal{F}\wedge x\in A)\wedge\exists A\,(A\in\mathcal{G}\wedge x\in A)$$

$$\Rightarrow x\in(\cup\mathcal{F})\wedge x\in(\cup\mathcal{G})$$

$$\Rightarrow x\in\big((\cup\mathcal{F})\cap(\cup\mathcal{G})\big)$$

ב. לא נכון. דוגמה נגדית: $\mathcal{F}=\big\{\{a,b\}\big\}$, $\mathcal{G}=\big\{\{a\}\big\}$. אז

$$\mathcal{F}\cap\mathcal{G}=\emptyset$$

$$\cup(\mathcal{F}\cap\mathcal{G})=\emptyset$$

מצד שני,

$$\cup\mathcal{F}=\{a,b\}$$

$$\cup\mathcal{G}=\{a\}$$

$$(\cup\mathcal{F})\cap(\cup\mathcal{G})=\{a\}\neq\cup(\mathcal{F}\cap\mathcal{G})$$

<u>שאלה 5 (20 נקודות)</u>

תהיה A קבוצה לא ריקה, ו-R יחס טרנזיטיבי על A. תהיה $B = \mathcal{P}(A) \setminus \emptyset$.

א. (10 נק') נגדיר יחס S באופן הבא:

$$S = \{(X,Y) \in B \times B \mid \forall x \in X \ \forall y \in Y \ (x \ R \ y)\}$$

הוכיחו ש-S הוא טרנזיטיבי.

ב. (10 נק') נגדיר יחס S' באופן הבא:

$$S' = \{(X,Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \mid \forall x \in X \ \forall y \in Y \ (x \ R \ y)\}$$

האם היחס S' הוא טרנזיטיבי ? יש להוכיח את התשובה.

פתרון:

א. יהיו $(X,Y) \in S$ ו-$(Y,Z) \in S$. כדי להוכיח טרנזיטיביות של S יש להוכיח ש-$(X,Z) \in S$.

הוכחה:

כיוון ש-$(X,Y) \in S$, לכן לפי ההגדרה של S מתקיים:

$$\forall x \in X \forall y \in Y : xRy$$

כיוון ש-$(Y,Z) \in S$ לכן

$$\forall y \in Y \ \forall z \in Z : yRz$$

כלומר

$$\forall x \in X \forall y \in Y \forall z \in Z : xRy \wedge yRz$$

לפי ההגדרה של B מתקיים $Y \neq \emptyset$. לכן

$$\forall x \in X \exists y \in Y \forall z \in Z : xRy \wedge yRz$$

כיוון ש-R טרנזיטיבי,

$$\forall x \in X \exists y \in Y \forall z \in Z : xRz$$

$$\forall x \in X \forall z \in Z : xRz$$

ולכן לפי ההגדרה של S קבלנו

$$(X,Z) \in S$$

ב. לא נכון.

דוגמה נגדית: תהיה $A = \{1\}$, ו-R הוא יחס "קטן מ-" ($<$). היחס הוא טרנזיטיבי.

תהיה $X = Z = \{1\}$, ו-$Y = \emptyset$. שימו לב ש- $X,Y,Z \in \mathcal{P}(A)$.

כיוון ש-$Y = \emptyset$, לכן מתקיים באופן טריוויאלי

$$\forall x \in X\ \forall y \in Y\ (x < y)$$

וגם

$$\forall y \in Y\ \forall z \in Z\ (y < z)$$

כלומר, $(X,Y) \in S'$ **וגם** $(Y,Z) \in S'$.

אבל $(X,Z) \neq S'$ כיוון שקיימים $x = 1$, $z = 1$ כך ש- $x \in X$, $z \in Z$, **ו**-$(x,z) \notin R$.

<u>שאלה 6 (25 נקודות)</u>

יהיה R יחס סדר חלקי על A **ו-** S יחס סדר חלקי על B.

א. (15 נק') נגדיר יחס L על $A \times B$ באופן הבא:

$$L = \{((a,b),(a',b')) \in (A \times B) \times (A \times B) \mid aRa' \wedge ((a = a') \Rightarrow bSb')\}$$

הוכיחו ש- L הוא יחס סדר חלקי על $A \times B$.

ב. (10 נק') נניח ש- R ו-S הם יחסי סדר מלאים. האם אז L הוא יחס סדר מלא ?

תשובה:

ב) L הוא יחס סדר מלא.